שיטות ספירה בסיסיות

גיל כהן

קומבינטוריקה, לעיתים מכונה "אמנות הספירה ללא ספירה", היא ענף במתמטיקה בו חוקרים
את הגודל של קבוצות סופיות מעניינות.

שאלה 1

כמה מספרים טבעיים בני 4 ספרות ישנם?

פתרון קל אך לא מועיל

$$\left|\{x \in \mathbb{N} \mid 1000 \le x \le 9999\}\right| = 9999 - 1000 + 1 = 9000$$

פתרון מסובך יפה יותר אך שימושי

9 אפשרויות לספרה הראשונה

10 אפשרויות

__ __ __ __

10 אפשרויות עבור כל קביעה של הספרה הראשונה

10 אפשרויות

עיקרון הכפל $\Longrightarrow$

$$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = \boxed{9000}$$

עיקרון הכפל

אם ניתן לבנות את איברי הקבוצה המבוקשת A ב- n שלבים כך
שבכל שלב $1\le i\le n$ יש k_i אפשרויות ללא תלות בבחירות הקודמות.
אזי

$$|A| = |A_1\times\cdots\times A_n| = \prod_{i=1}^{n} k_i$$

תוצאת השלב הראשון

תוצאת השלב ה- n -י

שאלה 2

כמו שאלה 1 אך ללא זוג ספרות סמוכות זהות.

שאלה 2

כמו שאלה 1 אך ללא זוג ספרות סמוכות זהות.

9 9 9 9

אפשרויות

פתרון

$$\Rightarrow \boxed{9^4}$$

$$k_1 = \dots = k_4 = 9$$

אבל מה אם היינו מתחילים מימין?

? 9 9 10

עיקרון החיבור

$\forall i \neq j \ A_i \cap A_j = \emptyset$

אם ניתן לחלק את איברי הקבוצה A באופן כזה שכל איבר שייך לאחת מבין n קבוצות אפשריות $A_1, \dots, A_n$ שהן זרות בזוגות אז

$$|A| = |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

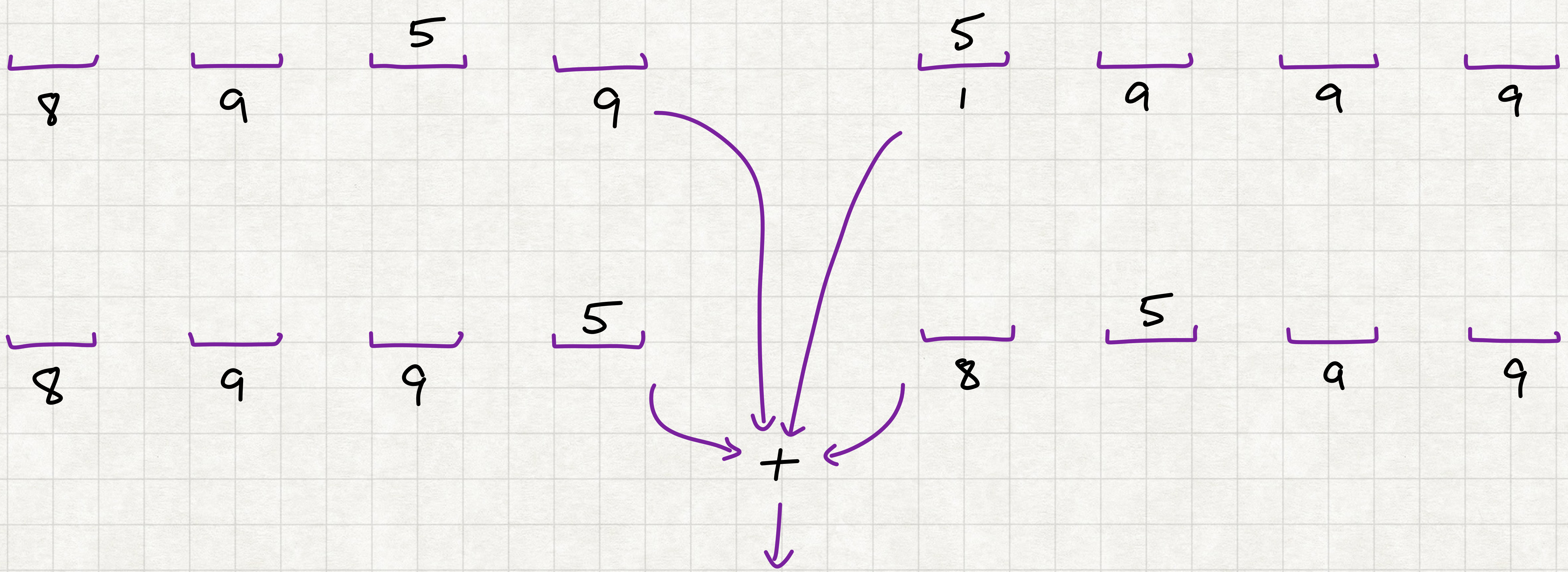
שאלה 3

כמו שאלה 1 כך שהספרה 5 מופיעה בדיוק פעם אחת.

שאלה 3

כמו שאלה 1 כך שהספרה 5 מופיעה בדיוק פעם אחת.

פתרון



$$\boxed{9^3+3\cdot 8\cdot 9^2}$$

שאלה 4

כמו שאלה 1 כן שהספרה 5 מופיעה לפחות פעם אחת.

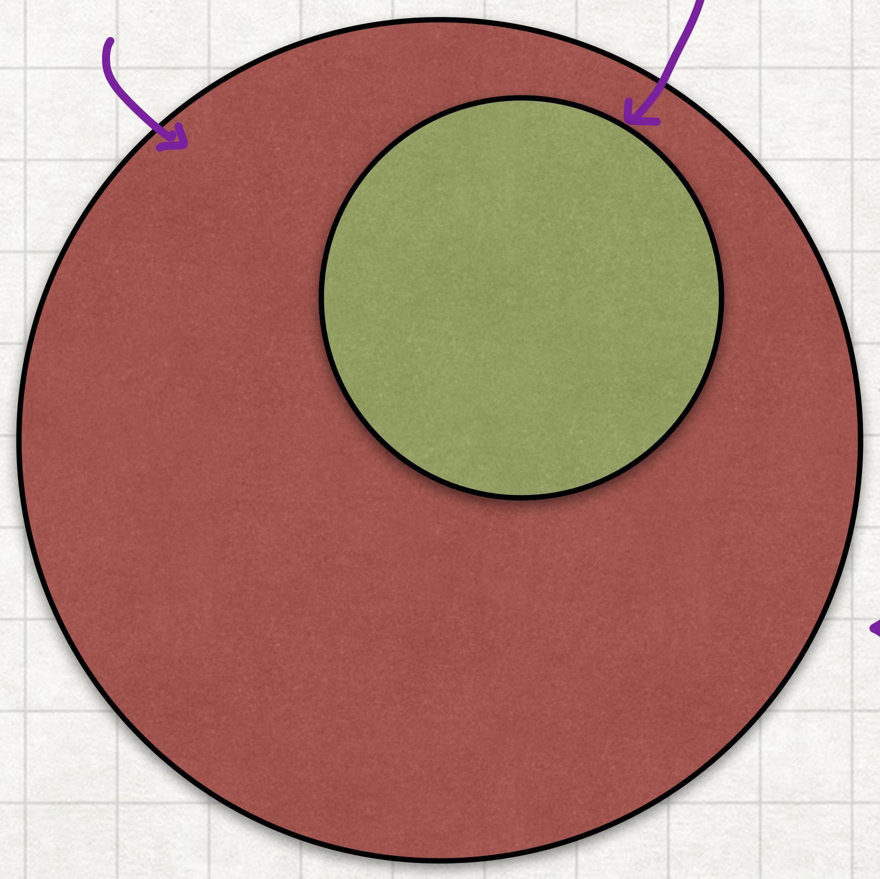
פתרון

נשאל קודם כמה מספרים בני 4 ספרות ישנם ללא הספרה 5

$$\underset{8}{\underline{\quad}}\ \ \underset{9}{\underline{\quad}}\ \ \underset{9}{\underline{\quad}}\ \ \underset{9}{\underline{\quad}} \Rightarrow 8\cdot 9^3$$

תשובה = $\boxed{9\cdot 10^3 - 8\cdot 9^3}$

התשובה לשאלה 1



הגדרה (תמורה)

תהא A קבוצה בגודל n. סדרה באורך n ללא חזרות של איברי A נקראת **תמורה** (permutation ; פרמוטציה) של A.

דוגמא

התמורות של $A=\{1,2,3\}$ הן

1 2 3
1 3 2
2 1 3
2 3 1
3 1 2
3 2 1

הגדרה

מספר התמורות של קבוצה בגודל n מסומן ב- $n!$ (n עֲצֶרֶת)

עצרת:

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1 = \prod_{i=1}^{n} i$$

$1! = 1$

$2! = 2$

$3! = 6$

$4! = 24$

$5! = 120$

$\vdots$

$21! >$ מספר השניות מאז המפץ הגדול!

מה לגבי $0! = ?$

פינת הקומבינטוריקה לנפש

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$$

$$n! = \int_{t=0}^{\infty} e^{-t} t^{n-1}\, dt$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)! = \sqrt{\pi}$$

$$p \mid (p-1)! + 1$$

שאלה 5

בכמה דרכים ניתן לבחור k איברים מתוך $[n]=\{1,\dots,n\}$

כאשר מותרות חזרות ויש חשיבות לסדר הבחירה?

שאלה 5

כמה דרכים ניתן לבחור k איברים מתוך $[n]=\{1,\dots,n\}$

כאשר מותרות חזרות ויש חשיבות לסדר הבחירה?

$$\underbrace{n}_{1}\quad \underbrace{n}_{2}\quad \underbrace{n}_{3}\quad \cdots\quad \underbrace{n}_{k} \Rightarrow n^k$$

שאלה 6

כמה מחרוזות בינאריות באורך n ישנן?

שאלה ~~5~~ 7

בכמה דרכים ניתן לבחור k איברים מתוך $[n]=\{1,\dots,n\}$

כאשר ~~מותרות~~ אסורות חזרות ויש חשיבות לסדר הבחירה?

שאלה ~~5~~ 7

בכמה דרכים ניתן לבחור k איברים מתוך $[n]=\{1,\dots,n\}$

כאשר ~~מותרות~~ אסורות חזרות ויש חשיבות לסדר הבחירה?

$$\underbrace{n}_{1}\quad \underbrace{n-1}_{2}\quad \underbrace{n-2}_{3}\quad \cdots\quad \underbrace{n-(k-1)}_{k}$$

האם הנוסחה תקפה גם עבור $n<k$?

אם $k\leq n$ נוכל לכתוב את הפתרון בצורה $\dfrac{n!}{(n-k)!}$

$n=4 \quad k=2$ דוגמה

$$\frac{4!}{2!} = 4 \cdot 3 = 12$$

1	2	2	3
2	1	3	2
1	3	2	4
3	1	4	2
1	4	3	4
4	1	4	3

1	1
2	2
3	3
4	4

הארבעה שלא נכללים הם

$$4^2 - 4! = 4$$

בכמה דרכים ניתן לבחור k איברים מתוך $[n]=\{1,\dots,n\}$

חזרות \ חשיבות לסדר	כן	לא
אסור	$\frac{n!}{(n-k)!}$	
מותר	n^k	

אנחנו כאן

בכמה דרכים ניתן לבחור k איברים מתוך $[n]=\{1,\dots,n\}$

$n=4 \quad k=2$

1 2 2 1	2 3 3 2
1 3 3 1	2 4 4 2
1 4 4 1	3 4 4 3

חזרות

	כן	לא
אסור	$\frac{n!}{(n-k)!}$	
מותר	n^k	

חשיבות לסדר

אנחנו כאן

בכמה דרכים ניתן לבחור k איברים מתוך $[n]=\{1,\dots,n\}$

$n=5 \qquad k=3$

1 2 3
1 3 2
2 1 3
2 3 1
3 1 2
3 2 1

1 2 4
1 4 2
2 1 4
2 4 1
4 1 2
4 2 1

1 2 5
1 5 2
⋮
5 2 1

1 3 4
1 4 3
⋮
4 3 1

1 3 5
1 5 3
⋮
5 3 1

1 4 5
1 5 4
⋮
5 4 1

2 3 4
2 4 3
3 2 4
⋮
4 3 2

2 3 5
2 5 3
⋮
5 3 2

2 4 5
2 5 4
⋮
5 4 2

3 4 5
3 5 4
⋮
5 4 3

$$\frac{1}{k!}\cdot\frac{n!}{(n-k)!}$$

חשיבות לסדר

חזרות	כן	לא
אסור	$\frac{n!}{(n-k)!}$	אנחנו כאן
מותר	n^k	

הגדרה:

עבור $0 \le k \le n$ שלמים נסמן “n בחר k”

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

דוגמאות?

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = n$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!\,(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\binom{n}{3} = \frac{n!}{3!\,(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,0!} = 1 = \binom{n}{0}$$

חזרות \ חשיבות לסדר	כן	לא
אסור	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$
מותר	n^k	

חזרות \ חשיבות לסדר	כן	לא
אסור	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$
מותר	n^k	

שאלה 8

כמה מחרוזות בינאריות באורך n ישנן עם בדיוק k אחדים

רעיון לא מוצלח

שימוש בעיקרון הכפל

שאלה 8

כמה מחרוזות בינאריות באורך n ישנן עם בדיוק k אחדים

פתרון

נבחר k אינדקסים מתוך ה-n בהן נציב 1 (ובשאר 0)

* אין חשיבות לסדר
* אין חזרות

$\Leftarrow \binom{n}{k}$

דוגמה $k=2$ $n=5$

$1,2 \leftrightarrow 11000$

$1,3 \leftrightarrow 10100$

$2,5 \leftrightarrow 01001$

שום מחרוזת לא מתאימה ל- $2,2$

02000

שאלה 9

כמה מטריצות $n \times n$ עם כניסות מתוך $\{0,1\}$ ישנן

א. ללא הגבלות ?

ב. סימטריות ?

ג. עם בדיוק k אחדים ?

ד. כל שורה הינה מונוטונית ?

שאלה 9

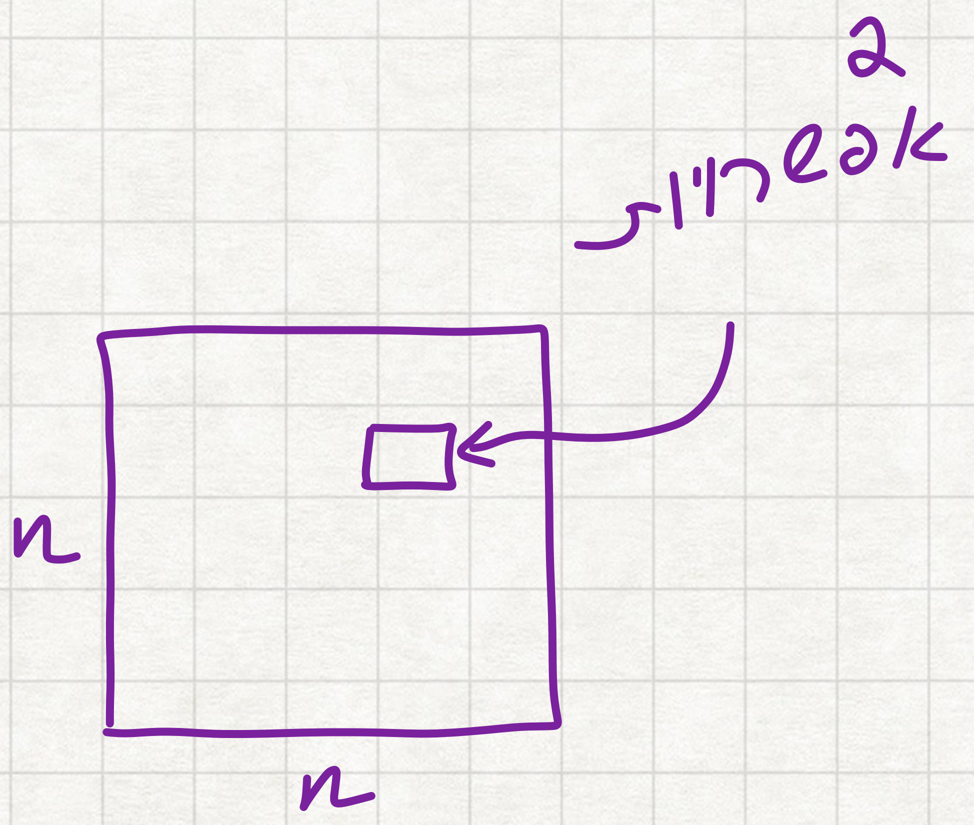
כמה מטריצות $n \times n$ עם כניסות מתוך $\{0,1\}$ ישנן

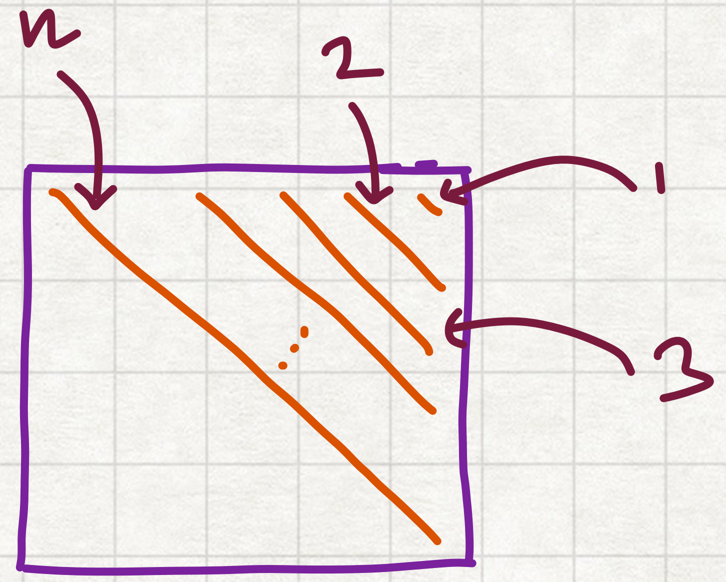
א. ללא הגבלות?

ב. סימטריות?

ג. עם בדיוק k אחדים?

3. כל שורה הינה מונוטונית?





פתרון

א. מכלל הכפל - 2^{n^2}

ב. שוב מכלל הכפל אך הפעם ישנן $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$

דרגות חופש, ולכן התשובה היא $2^{\binom{n+1}{2}}$.

שאלה 9

כמה מטריצות $n \times n$ עם כניסות מתוך $\{0,1\}$ ישנן

א. ללא הגבלות?

ב. סימטריות?

ג. עם בדיוק k אחדים?

ד. כל שורה הינה מונוטונית?

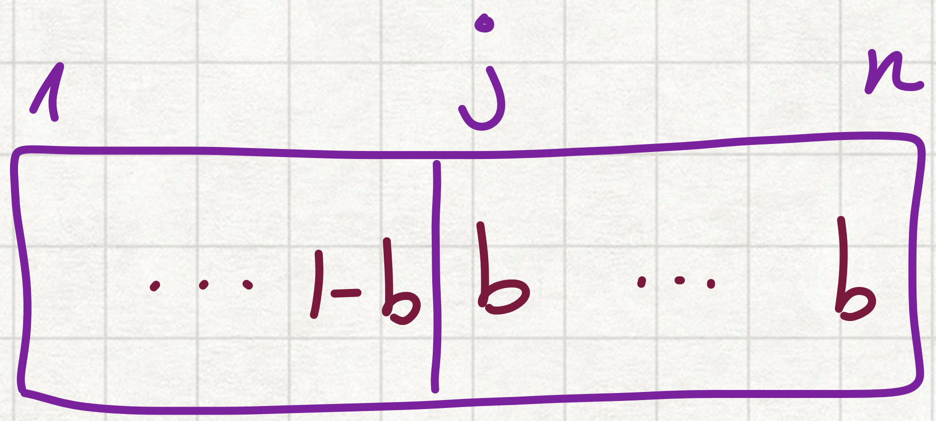
פתרון

ג. עיקרון הכפל לא מתאים. אנו צריכים לבחור k מתוך n^2 כניסות של המטריצה שבהן יהיה 1. בשאר "אוטומטית" יהיה 0. ולכן התשובה היא $\binom{n^2}{k}$.

שאלה 9

כמה מטריצות $n\times n$ עם כניסות מתוך $\{0,1\}$ ישנן

3. כל שורה הינה מונוטונית?



פתרון

3. נפתור עבור כל שורה בנפרד בכדי לקבל תשובה כללית x ואז נעלה בחזקת n - מספר השורות.

מהו x? נבחר כניסה $1\le j\le n$ בה מופיע בפעם הראשונה המספר b שמופיע בסוף השורה. לכך יש n אפשרויות.

עבור b ישנן 2 בחירות ולכן מכלל הכפל $x=2n$

ובסך הכל התשובה היא $(2n)^n$

בדיקה (של x)

$n=1$: $\boxed{0}$ $\boxed{1}$

$n=2$: $\boxed{00}$ $\boxed{01}$ $\boxed{10}$ $\boxed{11}$

$n=3$: 000 100 110

111 011 001

רגע למה ללכת ככה:

חזרות	כן	לא
אסור	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$
מותר	n^k	

חשיבות לסדר

ולא ככה?

חזרות	כן	לא
אסור	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$
מותר	n^k	$\frac{n^k}{k!}$

חשיבות לסדר

$n=4 \quad k=2$

1 2 2 1	2 3 3 2
1 3 3 1	2 4 4 2
1 4 4 1	3 4 4 3

1 1

2 2

3 3

4 4

רגע למה ללכת ככה

		חשיבות לסדר: כן	חשיבות לסדר: לא
חזרות	אסור	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$
	מותר	n^k	

$n=4 \quad k=2$

12 21
23 32
13 31
24 42
14 41
34 43

$x_1=0$
$x_2=0$
$x_3=1$
$x_4=1$

11
22
33
44

$x_1=x_2=x_4=0$
$x_3=2$

רעיון!?

ננסה לייצג כל בחירה על ידי "רשימת מכולת": $x_1,\dots,x_n$

כך ש- x_i מציין כמה פעמים האיבר i נבחר. לכן אנו נדרשים

לכן ש-

1) $x_i \geq 0$ לכל $i \in \{1,\dots,n\}=[n]$.

2) $\sum_{i=1}^{n} x_i = k$

רעיון?!

ננסה לייצג כל בחירה ע"י "רשימת מכולת": $x_1, \dots, x_n$

כך ש- x_i מציין כמה פעמים האיבר i נבחר. לכן אנו נדרשים

לכן ש-

1) $x_i \geq 0$ לכל $i \in \{1, \dots, n\} = [n]$.

2) $\sum_{i=1}^{n} x_i = k$

יופי! ?...

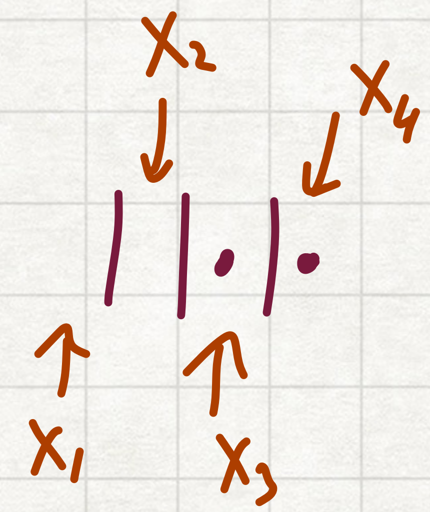
פה מגיע רעיון מבריק. במקום לכתוב את $x_1, \dots, x_n$ בבסיס העשרוני עם פסיקים מפרידים נחזור לתקופת האבן ונכתוב עם מקלות ואבנים.

$n=4 \quad k=2$

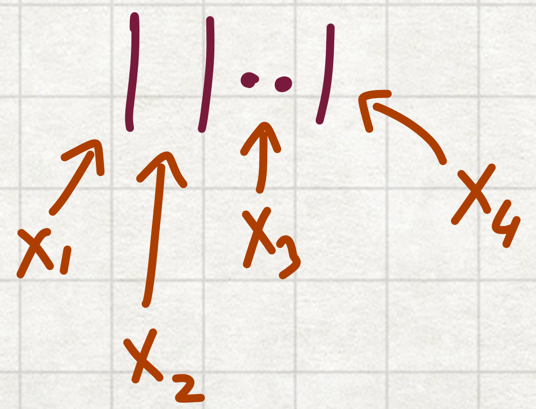
12 21 | 23 32
13 31 | 24 42
14 41 | 34 43

11
22
33
44

$x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$



$x_1 = x_2 = x_4 = 0$
$x_3 = 2$



$n=4 \quad k=2$

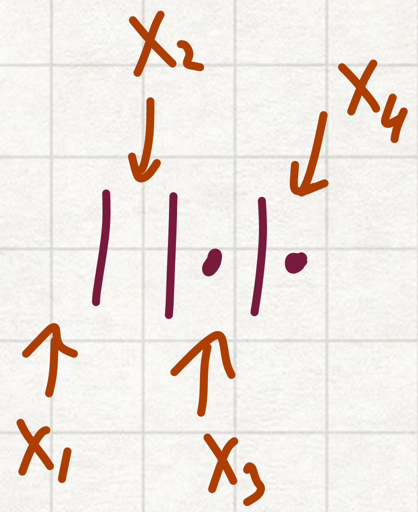
1 2 2 1	2 3 3 2
1 3 3 1	2 4 4 2
1 4 4 1	3 4 4 3

11

22

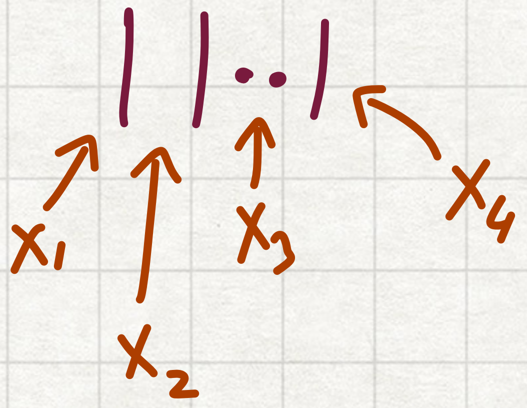
33

44



$x_1=0$
$x_2=0$
$x_3=1$
$x_4=1$

$x_1=x_2=x_4=0$
$x_3=2$



(1 $x_i \geq 0$ לכל $i \in \{1,\dots,n\} = [n]$.

(2 $\sum_{i=1}^{n} x_i = k$

$*$

יופי! ?...

פה מגיע רעיון מבריק. במקום לכתוב את $x_1,\dots,x_n$ בבסיס העשרוני עם פסיקים מפרידים נחזור לתקופת האבן ונכתוב עם מקלות ואבנים.

זה לא נראה מבריק במיוחד אך מכאן קל יותר לראות שכל פתרון חוקי למערכת (*) ניתן לייצג כמחרוזת בינארית (אבן $=0$ מקל $=1$) באורך $\underbrace{k}_{\text{אבנים}}+\underbrace{n-1}_{\text{מקלות חוצצים}}$ עם בדיוק $\underbrace{k}_{\text{אבנים}}$ אפסים.

ואת הבעיה הזו כבר פתרנו! $\binom{k+n-1}{k}$

בדיקה: $\binom{2+4-1}{2} = \binom{5}{2} = \frac{5\cdot 4}{2} = 10$

לסיכום

כמה דרכים ניתן לבחור k איברים מתוך $[n]=\{1,\dots,n\}$

חזרות \ חשיבות לסדר	כן	לא
אסור	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$
מותר	n^k	$\binom{k+n-1}{k}$

שאלה 10

כמה מטריצות $n \times n$ ישנן עם כניסות מ- $[m]=\{1,\dots,m\}$ כך שכל שורה מונוטונית לא יורדת?

שאלה 10

כמה מטריצות $n\times n$ ישנן עם כניסות מ- $[m]=\{1,\dots,m\}$ כך שכל שורה מונוטונית לא יורדת?

פתרון

כמו קודם, נפתור עבור כל שורה בנפרד ונעלה בחזקת n.

נבחין כי בהינתן שציינו כמה פעמים כל אחד מהמספרים $1,\dots,m$ מופיע, השורה עצמה נקבעת ע"פ המונוטוניות!

לכן מספר האפשרויות לכל שורה היא $\binom{n+m-1}{n}$

והתשובה הסופית היא $\binom{n+m-1}{n}^n$

חזרות	כן (חשיבות לסדר)	לא (חשיבות לסדר)
אסור	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$
מותר	n^k	$\binom{k+n-1}{k}$

$n=7$
$m=6$

1124666

$\Updownarrow$

$x_1=2$ $x_4=1$
$x_2=1$ $x_5=0$
$x_3=0$ $x_6=3$

סימון של התרגיל

$"k"=n$
$"n"=m$

סימון מהטבלה

שאלה 11

כמה פתרונות בטבע"ם יש לאי השוויון

$$(*)\quad x_1+\dots+x_n \le k$$

חזרות \ חשיבות לסדר	כן	לא
אסור	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$
מותר	n^k	$\binom{k+n-1}{k}$

מספר הפתרונות למערכת

$$\begin{cases} x_1+\dots+x_n=k \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

שאלה 11

כמה פתרונות בטבע"ם יש לאי השוויון

$$(*) \qquad x_1+\dots+x_n \le k$$

פתרון לא מהיר

פתרון $(x_1,\dots,x_n)$ ל-$(*)$ הוא פתרון לבדיוק אחת מהמערכות

$\binom{0+n-1}{0}$:מספר פתרונות $\longrightarrow$ $x_1+\dots+x_n=0$

$\binom{1+n-1}{1}$:מספר פתרונות $\longrightarrow$ $x_1+\dots+x_n=1$

$x_1+\dots+x_n=2$

$\vdots$

$\binom{k+n-1}{k}$:מספר פתרונות $\longrightarrow$ $x_1+\dots+x_n=k$

	כן	לא
אסור	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$
מותר	n^k	$\binom{k+n-1}{k}$

חזרות

חשיבות לסדר

מספר הפתרונות למערכת

$$\begin{cases} x_1+\dots+x_n=k \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

לא אוהבים במיוחד פתרון בכמה שמספר המחוברים תלוי בפרמטר של הבעיה

עיקרון החיבור $\Longleftarrow$

$$\text{תשובה סופית} = \sum_{l=0}^{k}\binom{l+n-1}{l}.$$

חזרות \ חשיבות לסדר	כן	לא
אסור	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$
מותר	n^k	$\binom{k+n-1}{k}$

מספר הפתרונות למערכת

$$\begin{cases} x_1+\dots+x_n=k \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

שאלה 11

כמה פתרונות בטבעיים יש לאי השוויון

$$(*) \qquad x_1+\dots+x_n \leq k$$

פתרון טוב יותר

נוסיף משתנה טבעי "dummy" x_0 ונסתכל על המערכת

$$(**) \qquad x_0+\dots+x_n \underset{\leq}{=} k$$

נבחין כי יש זיווג בין הפתרונות של המערכת $(*)$ ו- $(**)$.

מספר הפתרונות ל-$(**)$ הוא $\binom{k+(n+1)-1}{k} = \binom{k+n}{k}$.

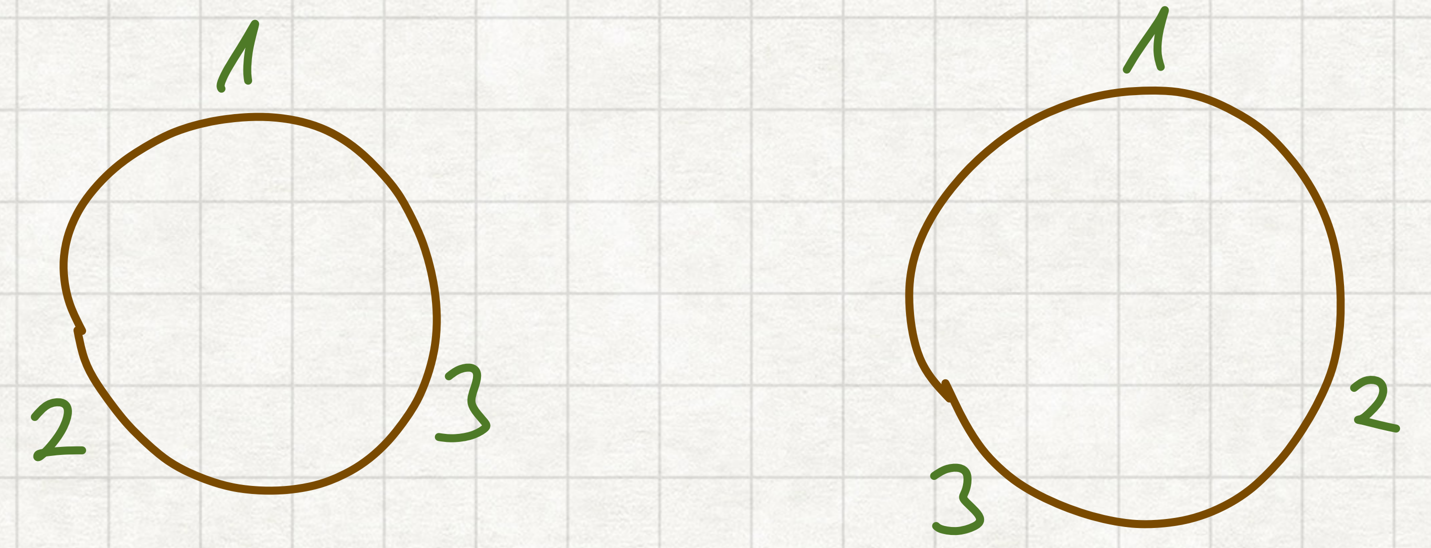
כמו כן הוכחנו את הזהות $\sum_{l=0}^{k} \binom{l+n-1}{l} = \binom{k+n}{k}$!

שאלה 12

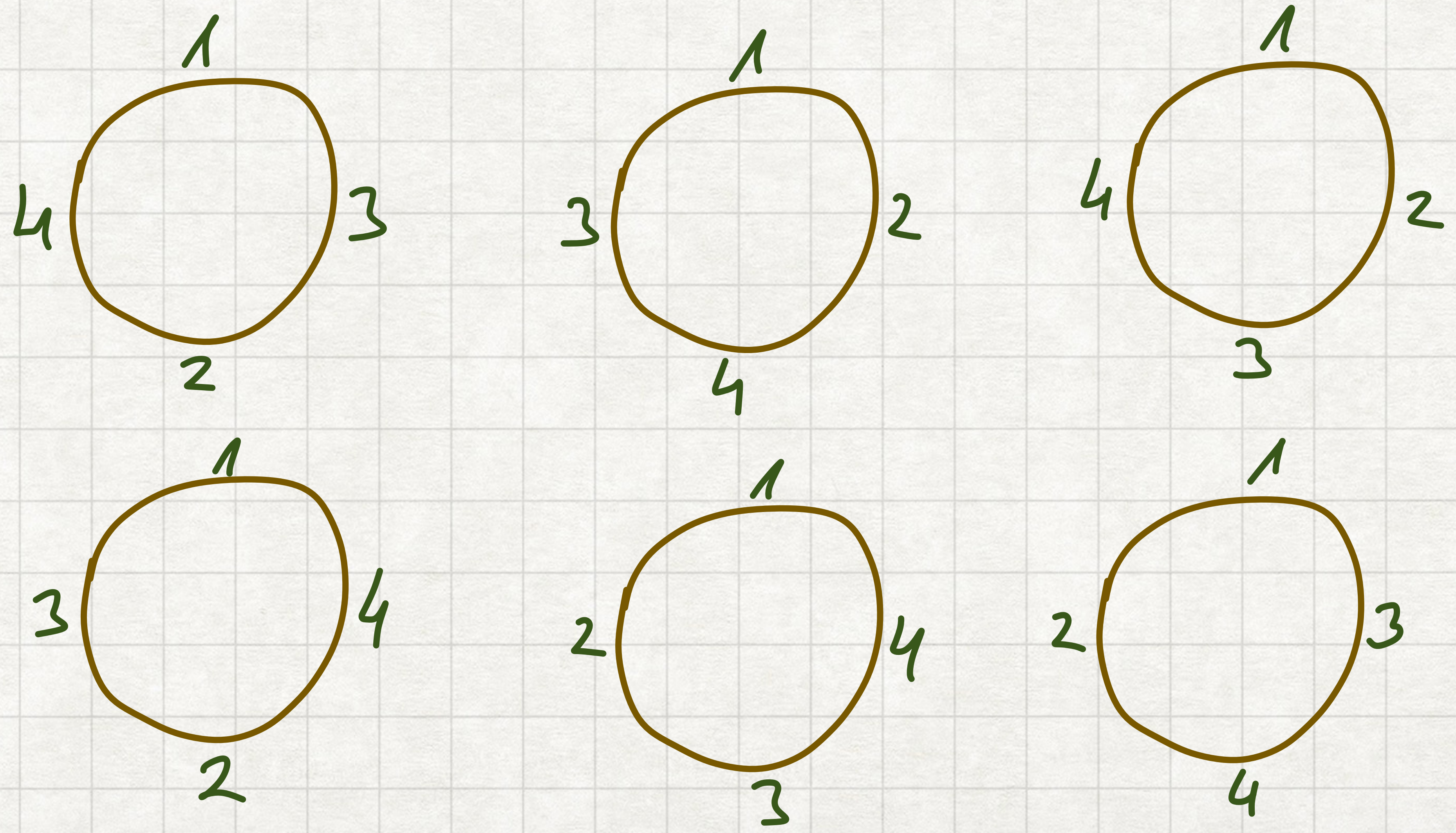
כמה דרכים יש לסדר n אנשים במעגל?

חזרות \ חשיבות לסדר	כן	לא
אסור	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$
מותר	n^k	$\binom{k+n-1}{k}$

$n=3:$



$n=4:$



חזרות \ חשיבות לסדר	כן	לא
אסור	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$
מותר	n^k	$\binom{k+n-1}{k}$

שאלה 12

כמה דרכים יש לסדר n אנשים במעגל?

פתרון

אם היה מדובר בספסל ישר התשובה הייתה $n!$.

מהסימטריה של המעגל כל n פתרונות לבעיית הספסל המתקבלים ע"י הזזה ציקלית האחד של השני מהווים פתרון אחד לבעיית המעגל. לכן התשובה היא

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$

חזרות \ חשיבות לסדר	כן	לא
אסור	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$
מותר	n^k	$\binom{k+n-1}{k}$

שאלה 12

כמה דרכים יש לסדר n אנשים במעגל?

פתרון שני

לראשון שיושב בשולחן אין כל בחירה. עכשיו נותר לנו
לסדר $n-1$ אנשים על מה שהפך להיות ספסל ישר
שכן אפשר לדבר על זה שיושב משמאל סמוך לאותו
פלוני ראשון. זה שיושב שני משמאל וכו'.
לכן התשובה היא $(n-1)!$.