בדידה 2

פונקציות יוצרות

גיל כהן

הגדרה

תהא $a_0, a_1, \ldots$ סדרת מספרים.
הפונקציה היוצרת המתאימה לה היא

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

המקדם של x^n ב- $A(x)$ מסומן ע"י

$$[x^n]\, A(x) = a_n$$

דוגמה:

לסדרה הקבועה $1,1,1,\dots$ מתאימה הפונ' היוצרת

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1\cdot x^n = 1+x+x^2+x^3+\cdots$$

$$= \frac{1}{1-x}$$

ולסדרה $1,0,1,0,\dots$ מתאימה הפונ' היוצרת

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1\cdot x^{2n} = 1+x^2+x^4+\cdots = \frac{1}{1-x^2}$$

הערה טכנית

אנו חושבים על פונקציה יותר כעל "פונקציה" במובן שנרצה להציב בה ערכים. כלומר אנו חושבים על x כמשתנה פורמלי, ובפרט לא מודאגים מתחומים בהם הפונקציה אינה מוגדרת. למשל נתקן מבלי להתייחס לשינוי בתחומי ההגדרה

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

מוגדר ל- $|x|<1$

מוגדר ל $x \neq 1$

הערה פילוסופית

פונקציה יוצרת של סדרה "מקודדת" את ערכי
הסדרה כולן יחד בצורה "קומפקטית" ופעולות
על הפונקציה היוצרת עובדות לכן על כל
המידע יחד.

פעולות על
פונקציות יורדות

אם לא להציג אז מה כן?

אנו נרצה לבצע פעולות על הפונקציה היוצרת שמתבטאות עם פעולות על הסדרה.

<u>דוגמה:</u>

אם $A(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ אז

$c\in\mathbb{R}$

$$A(cx)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (cx)^n=\sum_{n=0}^{\infty} (a_n c^n)x^n$$

פונקציה יוצרת עבור הסדרה $a_0, ca_1, c^2a_2, \dots$

לכן הפונקציה היוצרת של "חזקות 2"

$1, 2, 4, 8, \dots$

היא

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \frac{1}{1-2x}$$

דוגמה

אם $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ אז

$$A(cx) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (cx)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n c^n) x^n$$

פונקציה יוצרת עבור הסדרה $a_0, ca_1, c^2a_2, \dots$

חיבור פונקציות יוצרות

אם נחבר פונקציות יוצרות נקבל את הפונ'

היוצרת של סכום הסדרות המתאימות

$$A(x) = \sum a_n x^n \qquad\qquad B(x) = \sum b_n x^n$$

$$A(x) + B(x) = \sum (a_n + b_n) x^n \qquad \Longleftarrow$$

ואותו כנ"ל כמובן לגבי חיסור.

דוגמה.

ראינו כי

$$1, 2, 4, 8, \ldots \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1}{1-2x}$$

$$1, 1, 1, \ldots \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1}{1-x}$$

ולכן הפונ׳ היוצרת של הסדרה $a_n = 2^n - 1$ היא

$$\frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x} = \frac{x}{(1-2x)(1-x)}$$

$$= \frac{x}{2x^2 - 3x + 1}$$

הערה בנוגע לסימון -

ראינו כי

$$\frac{1}{1-2x} \longleftrightarrow 1,2,4,8,\dots$$

אך לעיתים נסמן זאת ע"י

$$\frac{1}{1-2x} \longleftrightarrow 2^n$$

האיבר
ה-n-י

ובאופן כללי נכתוב

$$A(x) \longleftrightarrow a_n$$

או

$$A(x) \longleftrightarrow a$$

גזירה של פונקציות יוצרות

נבחין כי אם

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

אז

$$A'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

גם $n=1$ נכון

ולכן

$$xA'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n$$

כלומר גזירה שאחריה הכפלה ב-x

מתאימה לסדרה

$$0 \cdot a_0,\ 1 \cdot a_1,\ 2 \cdot a_2,\ \ldots$$

דוגמה

$$\frac{1}{1-x} \longleftrightarrow 1$$

כלומר הסדרה
1,1,1,...

ולכן

$$x\cdot\left(\frac{1}{1-x}\right)' \longleftrightarrow n$$

כלומר הסדרה
0, 1, 2, 3, ...

סדרת ⟶
המספרים
הטבעיים

לפשט

$$\frac{x}{(1-x)^2}$$

נפגש בא — שוב

$$x \cdot \left(\frac{x}{1-x^2}\right)' \longleftrightarrow n^2$$

סדרת הריבועים

נפשט

$$\frac{x(x^2+1)}{(1-x^2)^2}$$

$$\frac{x}{(1-x)^2} \longleftrightarrow 0, 1, 2, 3, \dots$$

נשים לב כי

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \frac{2}{(1-x)^3}$$

אזי

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(x^n\right)''$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\, x^{n-2}$$

גם $n=2$
נכון

$$\binom{n}{2}$$

ולכן

$$\frac{x^2}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2}\, x^n$$

כלומר

$$\frac{x^2}{(1-x)^3} \longleftrightarrow \binom{n}{2}$$

$$\frac{x^2}{(1-x)^3} \longleftrightarrow \binom{n}{2}$$

ובאופן כללי אפשר להראות כי לכל $m \geq 0$

$$\frac{x^m}{(1-x)^{m+1}} \longleftrightarrow \binom{n}{m}$$

מה לגבי $\int$?

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

אם

$$\int_0^x A(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x t^n\,dt$$

אז

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$$

כאמור אנחנו לא
מתרגשים מטנ"ל

$\int \Sigma \stackrel{?}{=} \Sigma \int$

כלומר

$$\int_0^\infty A(t)\,dt \longleftrightarrow 0,\ a_0,\ \frac{a_1}{2},\ \frac{a_2}{3},\ \ldots$$

<u>דוגמה:</u>

נזכור כי

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\Rightarrow \ln\frac{1}{1-x} = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

ודאו שאכן

$$\left(\ln\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{1-x}$$

הסדרה ההרמונית

$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

סיכום ביניים

הפעולות שראינו עד כה

$$A(cx) \longleftrightarrow c^n a_n$$

$a_0, ca_1, c^2a_2, \dots$

$$A(x)+B(x) \longleftrightarrow a_n+b_n$$

$$xA'(x) \longleftrightarrow na_n$$

$$\int_0^x A(t)\,dt \longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a_{n-1}}{n} & n \geq 1 \\ 0 & n=0 \end{cases}$$

פעולות
נוספות

סדרת הסכומים החלקיים

נבחין כי

$$\frac{1}{1-x}A(x) = \frac{1}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$= (1+x+x^2+\dots)(a_0+a_1x+a_2x^2+\dots)$$

$$= a_0 + (a_0+a_1)x + (a_0+a_1+a_2)x^2 + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)}_{\text{סכום חלקי}} x^n$$

דוגמה

ראינו כי

$$\frac{x^m}{(1-x)^{m+1}} \longleftrightarrow \binom{n}{m}$$

ולכן

$$\frac{x^m}{(1-x)^{m+2}} \longleftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m}$$

למשל עבור $m=2$

$$\frac{x^2}{(1-x)^4} \longleftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{2}$$

דוגמה נוספת

ראינו כי

$$\ln\frac{1}{1-x} \longleftrightarrow 0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ldots$$

ולכן

$$\frac{1}{1-x}\ln\frac{1}{1-x} \longleftrightarrow 0,\ 1,\ 1+\frac{1}{2},\ \underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}_{H_3},$$

נסמן

$$H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

מכפלת פונקציות יוצרות

אם $A(x)=\sum a_n x^n \quad , \quad B(x)=\sum b_n x^n$

אז

$$A(x)B(x) = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots)\cdot$$

$$(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots)$$

$$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x$$

$$+ (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2$$

$$+ \cdots$$

$$A(x)B(x) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x$$
$$+ (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \cdots$$

נגדיר את הקונבולוציה של הסדרות a, b
באופן הבא

$$(a * b)_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$$
$$= \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

הסימון
המקובל
לקונבולוציה

אז

$$A(x)B(x) \longleftrightarrow a * b$$

תרגיל

הוכיחו כי לכל $n \geq 0$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

פתרון.

ניתן לפתור את התרגיל ע"י טיעון קומבינטורי או גם בעזרת אינדוקציה. נוכיח כעת תוך שימוש בבינום ניוטון ובפרט תוך שימוש בקונבולוציה.

יהא $n\geq 0$. נגדיר את הסדרה

$$a_k = \binom{n}{k}$$

נזכיר כי
$a_k = 0$
עבור $k>n$

הפונקציה היוצרת המתאימה
היא

$$A(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (x+1)^n$$

ולכן הפונ' היוצרת של $a*a$ היא $(x+1)^{2n}$

$$(x+1)^{2n} \longleftrightarrow a*a$$

לכן

$$(a*a)_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

מצד שני

$$[x^n](x+1)^{2n} = \binom{2n}{n}$$

מנוסחת הבינום

$$\Leftarrow \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

חילוף מקדמים

חילוץ מקדמים

עד כה המרנו סדרה לפונ׳ יוצרת ושיחקנו עם
פונ׳ יוצרות. איך מחלצים את המקדמים מפונ׳
יוצרת? ניזכר במשפט טיילור

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2}x^2 + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{f^{(n)}(0)}{n!}}_{[x^n]f(x)} x^n$$

לדוגמא

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

ולכן

$$[x^n]\, e^x = \frac{1}{n!}$$

<u>דוגמא</u>

מסתבר שהדוגמה הבאה חשובה

$$f(x) = \sqrt{1+x}$$

$$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)(1+x)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f'''(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)(1+x)^{-\frac{5}{2}}$$

ובאופן כללי

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-(n-1)\right)(1+x)^{-\frac{2n-1}{2}}$$

$$\boxed{f^{(n)}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-(n-1)\right)(1+x)^{-\frac{2n-1}{2}}}$$

נגדיר את המקדם הבינומי לכל $x \in \mathbb{R}$ ו- $n \in \mathbb{N}$

באופן הבא

$$\boxed{\binom{x}{n} = \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-(n-1))}{n!}}$$

ולכן

$$f^{(n)}(0) = \binom{1/2}{n} n!$$

$$f^{(n)}(0) = \binom{1/2}{n} n!$$

כזכור,

$f(x) = \sqrt{1+x}$

ולכן

$$\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

משפט טיילור

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} x^n$$

כלומר

$$\sqrt{1+x} \longleftrightarrow \binom{1/2}{n}$$

$$\sqrt{1+x} \longleftrightarrow \binom{1/2}{n}$$

באופן כללי לכל $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\boxed{(1+x)^{\alpha} \longleftrightarrow \binom{\alpha}{n}}$$

מה שמכליל את נוסחת הבינום של ניוטון, שהרי

$$(1+x)^{k} = \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} x^{n} \longleftrightarrow \binom{k}{n}$$

כלומר $k \in \mathbb{N}$

נחפור עוד טיפה

$$n!\binom{1/2}{n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-(n-1)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\;\frac{(-1)}{2}\;\frac{(-3)}{2}\cdots\frac{(-(2n-3))}{2}$$

$$= \frac{1}{2^n}(-1)^{n-1}\,1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)$$

$$= \frac{1}{2^n}(-1)^{n-1}\,\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots(2n-3)(2n-2)}{2\cdot 4\cdots(2n-2)}$$

$$n!\binom{1/2}{n} = \frac{1}{2^n}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots(2n-3)(2n-2)}{2\cdot 4\cdots(2n-2)}$$

$$= \frac{1}{2^n}(-1)^{n-1}\cdot\frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!}$$

ולכן

$$\binom{1/2}{n} = \frac{2}{4^n}(-1)^{n-1}\underbrace{\frac{(2n-2)!}{n!\,(n-1)!}}$$

$$\frac{1}{n}\,\frac{(2n-2)!}{(n-1)!^2} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} = C_{n-1}$$!

כלומר

$$\boxed{\binom{1/2}{n} = \frac{2}{4^n}(-1)^{n+1} C_{n-1}}$$

מה שמוביל אותנו לחזור קצת למספרי קטלן.

מספרי קלן

מבים שןית

בעבר הוכחנו באופן בלתי תלוי ש

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k} \qquad n \geq 1 \quad C_0 = 1 \tag{*}$$

וגם ש

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \tag{**}$$

כעת נעזר בפונקציות יוצרות בכדי להוכיח

$$(*) \longrightarrow (**)$$

$$(*) \quad c_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-1-k} \qquad n \geq 1$$

pf

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

c_0

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-1-k} \right) x^n$$

$$= 1 + x \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} (c_k x^k)(c_{n-1-k} x^{n-1-k})$$

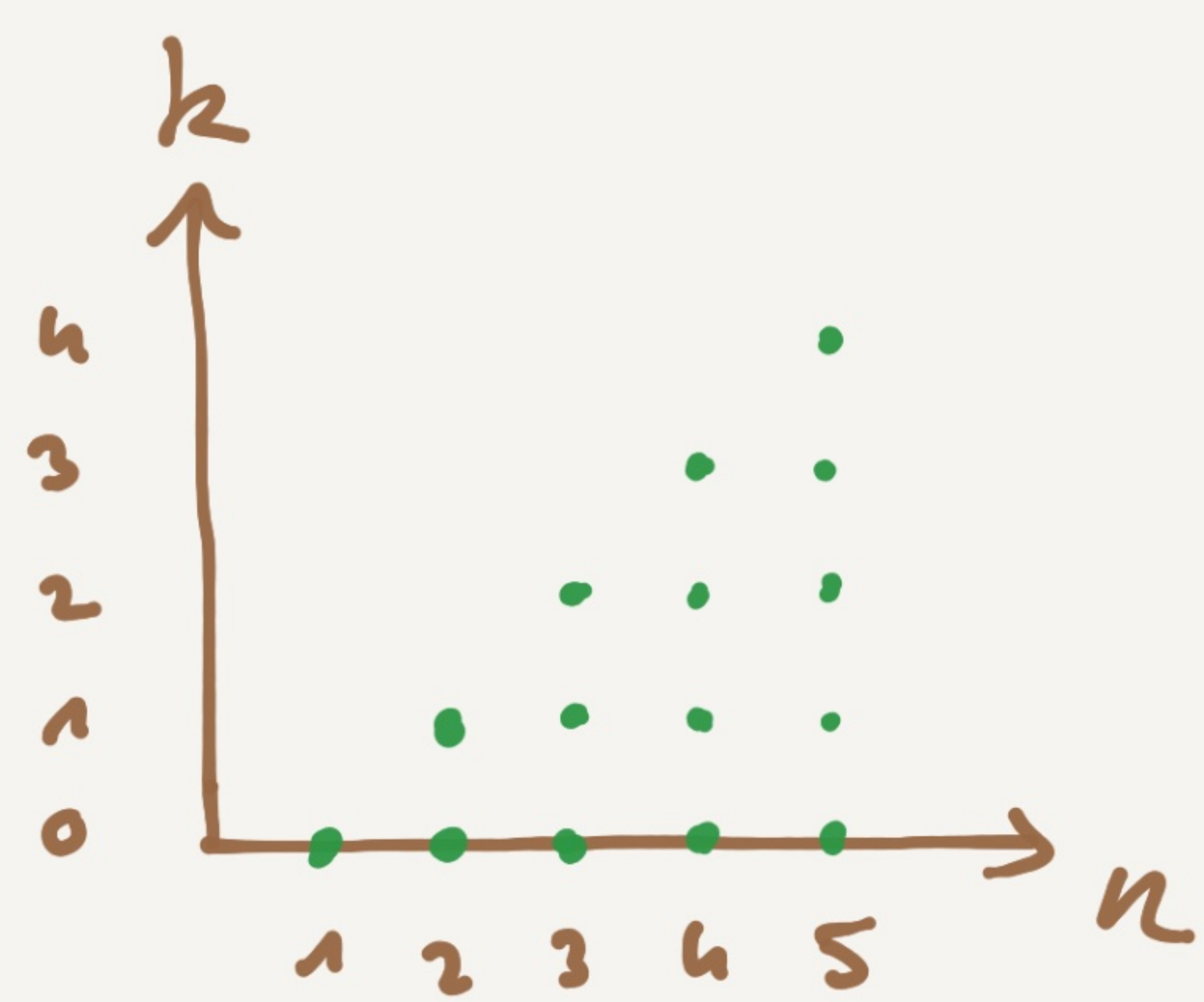
$$C(x) = 1 + x\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1}(c_k x^k)(c_{n-1-k}x^{n-1-k})$$

$$= 1 + x\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k+1}^{\infty}(c_k x^k)(c_{n-1-k}x^{n-1-k})$$

$$= 1 + x\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \underbrace{\sum_{n=k+1}^{\infty} c_{n-1-k}x^{n-1-k}}_{(\$)}$$

$$(\$) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j = C(x)$$

$j = n-1-k$



ולכן

$$C(x) = 1 + xC(x)\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k}_{C(x)}$$

$\Leftarrow$

$$C(x) = 1 + xC(x)^2$$

כלומר, $C(x)$ מקיימת את המשוואה הריבועית

$$xy^2 - y + 1 = 0$$

מותר להשתמש בנוסחה לפתרון משוואה ריבועית
גם כשהמקדמים מספרים ש. טורים פורמליים?

$$xy^2 - y + 1 = 0$$

ובכן כן! אבל בכל מקרה בסוף נוכל לבדוק אם
התשובה שלנו נכונה בכל מקרה.

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$$

זכרו כי

$$\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} x^n$$

ולכן

$$\sqrt{1-4x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-4x)^n$$

על כן

$$2xy = 1 \pm \sqrt{1-4x}$$

$$= 1 \pm \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-4x)^n}_{1-2x+\cdots}$$

אנחנו לא רוצים
לראות מקדמים
שליליים בבעיות
קומבינטוריות

אז ניקח את הפתרון עם המינוס ונקבל

$$2xC(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-4)^n x^n$$

$$2x\,C(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-4)^n x^n$$

נזכיר כי

$$\binom{1/2}{n} = \frac{2}{4^n} (-1)^{n+1} C_{n-1}$$

$$2x\,C(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4^n} (-1)^{n+1} (-4)^n C_{n-1} x^n \quad \Leftarrow$$

$$= 2 \sum_{n=1}^{\infty} C_{n-1} x^n$$

$$\Longrightarrow \quad C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \qquad \blacksquare$$

פתרון נוסחאות
נסיגה בעזרת
פונקציות יוצרות

פונקציות יוצרות שימושיות גם לפתרון נוסחאות נסיגה. נדגים זאת ע"י מציאת הנוסחה הסגורה למספרי פיבונאצ'י.

$$\begin{cases} F_n = F_{n-1} + F_{n-2} & \forall n \geq 2 \\ F_0 = F_1 = 1 \end{cases}$$

נביט בפונקציה היוצרת המתאימה

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$$

$$F(x) = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} F_n x^n$$

$$= 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} (F_{n-1} + F_{n-2}) x^n$$

$$= 1 + x + \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^n}_{x \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^{n-1}}_{\sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n = F(x) - 1}} + \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^n}_{x^2 \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^{n-2}}_{F(x)}}$$

על כן

$$F(x) = 1 + x + x\left(F(x) - 1\right) + x^2 F(x)$$

$$= 1 + (x + x^2) F(x)$$

$\Leftarrow$

$$F(x) = -\frac{1}{x^2 + x - 1} = -\frac{1}{(x-\alpha)(x-\varphi)}$$

כאשר

$$\alpha, \varphi = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

e ?> A, B eonj

$$\frac{1}{(x-\alpha)(x-\varphi)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\varphi}$$

$$\frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\varphi} = \frac{A(x-\varphi) + B(x-\alpha)}{(x-\alpha)(x-\varphi)}$$

$$= \frac{(A+B)x - (A\varphi + B\alpha)}{(x-\alpha)(x-\varphi)}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A\varphi + B\alpha = -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{aligned} A &= \frac{1}{\alpha-\varphi} = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ B &= \frac{1}{\varphi-\alpha} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

כלומר

$$\frac{1}{(x-\alpha)(x-\varphi)} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{x-\alpha} - \frac{1}{x-\varphi}\right)$$

ולכן

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\alpha-x} - \frac{1}{\varphi-x}\right)$$

כעת

$$\frac{1}{\alpha-x} = \frac{1}{\alpha}\,\frac{1}{1-x/\alpha}$$

$$= \frac{1}{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^n$$

על כן

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^n - \frac{1}{\varphi}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{\varphi}\right)^n\right)$$

כלומר

$$[x^n]F(x) = F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\alpha^{n+1}} - \frac{1}{\varphi^{n+1}}\right)$$

ולכן

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{2}{-1+\sqrt{5}}\right)^{n+1} - \left(\frac{2}{-1-\sqrt{5}}\right)^{n+1}\right]$$

דוגמה נוספת

$$\begin{cases} a_n = 5a_{n-1} - 8a_{n-2} + 4a_{n-3} \\ a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_2 = 4 \end{cases}$$

נגדיר

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$= 1 + x + 4x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (5a_{n-1} - 8a_{n-2} + 4a_{n-3}) x^n$$

$$\vdots$$

$$= 5xA(x) - 8x^2A(x) + 4x^3A(x) + x - x^2$$

על כן

$$A(x) = \frac{x - x^2}{1 - 5x + 8x^2 - 4x^3}$$

$$= \frac{x(1-x)}{(1-x)(1-2x)^2} = \frac{x}{(1-2x)^2}$$

כעת

$$\frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$$

נבחין כי

$$\left(\frac{1}{1-2x}\right)' = \frac{2}{(1-2x)^2}$$

$$\frac{1}{(1-2x)^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} n 2^n x^{n-1} \qquad \Longleftarrow$$

$$A(x) = \frac{x}{(1-2x)^2} \qquad \frac{1}{(1-2x)^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} n\, 2^{n} x^{n-1}$$

כלומר

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n\, 2^{n-1} x^{n}$$

ולכן

$$a_n = n \cdot 2^{n-1}$$

דוגמה מסכמת

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 2a_{n-3} & n \geq 3 \\ a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = -1 \end{cases}$$

כמו בדוגמאות הקודמות

$$A(x) = \dots = \frac{1-2x}{1-2x+x^2-2x^3} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-ix} + \frac{1}{1+ix}\right)$$

ולכן

$$a_n = \frac{1}{2}\left(i^n + (-i)^n\right)$$

$$= \frac{1}{2} i^n \left(1 + (-1)^n\right)$$

$\Leftarrow$ הסדרה היא

$1 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad \ldots$