TEL AVIV אוניברסיטת
UNIVERSITY תל אביב

מתמטיקה בדידה 2 **חורף תשפ"ד**

מתמטיקה בדידה 2 ־ מבחן מסכם מועד א

תאריך: 27/3/2024

סגל הקורס: פרופסור גיל כהן, יואב גל־צור, איתי כהן.

- משך הבחינה: שלוש שעות.
- השימוש בחומר עזר או במחשבון אסור.
- את התשובות יש לרשום רק על טופס הבחינה. מחברת הבחינה משמשת כטיוטה ולא תיבדק.
- יש לרשום מספר ת.ז. ומספר מחברת בראש כל אחד מהדפים בטופס.
- בטופס 9 עמודים, לא כולל עמוד זה, הכוללים 7 שאלות ו־2 עמודים עם מסגרת נוספת למקרה הצורך. שימו לב כי השאלה השביעית היא שאלת בונוס המיועדת לקבוצה 28 בלבד. ודאו שכלל העמודים ברשותכם.
- ערכה של כל אחת מ־6 השאלות, להוציא שאלת הבונוס, הוא 17 נקודות. ציון המבחן הסופי על כן יכול להגיע ל־102. ערכה של שאלת הבונוס הוא 5 נקודות, כך שסטודנטים מקבוצה 28 יכולים להגיע לציון של 107 נקודות. בכל מקרה, ציון המבחן הסופי יעוגל למטה, במקרה הצורך, ל־100.
- יש לרשום תשובה מנומקת עבור כל שאלה במסגרת המתאימה.
  - יש לכתוב את כל התשובות במקום המוקצב ובכתב קריא. תשובות ובהן חריגות לא זניחות מהמקום המוקצב, או תשובות הכתובות בכתב קטן באופן קיצוני או לא ברור לא ייקראו ולא יקבלו ניקוד, או שיקבלו ניקוד חלקי בלבד. תשובות שדורשות מאמצים רבים להבנתן גם כן עלולות לגרור הורדת ציון.
  - לכן, מומלץ בחום לפתור ראשית במחברת ואז לרשום פתרון מסודר במסגרת. כאמור, ישנן זוג מסגרות נוספות למקרה הצורך בסוף הטופס.
- ניתן לרשום "אינני יודע/ת" כתשובה לשאלה או סעיף שלה, פרט לשאלת הבונוס, ולקבל 20% מהניקוד. במקרה זה אין להוסיף שום הסבר ו/או לסמן את אחת האפשרויות.

בהצלחה!

שאלה 1 **(17 נקודות)** יהיו $n > a > b > c$ מספרים טבעיים. כמה זוגות לא סדורים של תתי קבוצות $A, B \subseteq [n]$ ישנם כך ש־$|A| = a, |B| = b$ ו־$|A \cap B| = c$. יש לספק נימוק קצר לתשובתכם.

ראשית, חייב להתקיים $n - a - b - c \geq 0$, או שלא ניתן לבחור זוג קבוצות כנ"ל.
נבחר את האיברים המשתתפים בחיתוך שתי הקבוצות, ישנן $\binom{n}{c}$ דרכים לעשות זאת.
אחר כך, נבחר את האיברים השייכים לקבוצה A מן האיברים הנותרים ובאותה צורה את האיברים השייכים ל־ B. מחוק הכפל נקבל שמספר הדרכים לבחור את זוג קבוצות הוא

$$\binom{n}{c}\binom{n-c}{a-c}\binom{n-c-a}{b-c}$$

שאלה 2 (17 נקודות) מצאו את המקדם של $x^m y^{10}$ בביטוי

$$\left(x^2+\frac{1}{x}+xy\right)^n$$

יש לספק נימוק קצר לתשובתכם.

נשתמש בנוסחת הבינום.

$$(x^2+\frac{1}{x}+xy)^n = ((x^2+\frac{1}{x})+xy)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(xy)^i\cdot(x^2+x^{-1})^{n-i}$$

נשים לב ש-y^{10} מופיע רק בנסכם אחד בתוך הסכום, כש-$i=10$.
נסתכל על הנסכם בו $i=10$ ונפתח את הסוגריים שנותרו בעזרת נוסחת הבינום.

$$\binom{n}{10}(xy)^{10}\cdot(x^2+x^{-1})^{n-10} = y^{10}\cdot\binom{n}{10}x^{10}\cdot\sum_{j=0}^{n-10}\binom{n-10}{j}x^{2\cdot(n-10-j)}x^{-j}$$

$$= y^{10}\cdot\binom{n}{10}\cdot\sum_{j=0}^{n-10}\binom{n-10}{j}x^{2n-10-3j}$$

הנסכם היחיד שבו מופיע x^m הוא כאשר $m=2n-10-3j$. לכן, המקדם a_m של המונום $x^m y^{10}$ הוא

$$a_m = \begin{cases}\binom{n}{10}\binom{n-10}{j} & m=2n-10-3j\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

שאלה 3 (17 נקודות) מפזרים 13 נקודות בתוך ריבוע שצלעותיו הן באורך 1. הוכיחו כי קיימות ארבע נקודות שפורסות מרובע עם שטח שאינו עולה על־0.25.

נחלק את הריבוע לארבעה ריבועים עם צלעות בגודל 0.5. מעקרון שובך היונים, באחד מהריבועים הקטנים יש לפחות ארבע נקודות. השטח שפורסות הנקודות האלה חסום בשטח של הריבוע הקטן, שהוא $0.5 \times 0.5 = 0.25$.

שאלה 4 (17 נקודות) מקטע גנטי מאורך n הוא איבר בקבוצה $\{A,C,G,T\}^n$.
מקטע גנטי יקרא **לא תקין** אם לפחות אחד מהבאים נכון עבורו:

1. אין בו את האות G.
2. האות T מופיעה 3 פעמים או יותר.

חשבו את **מספר המקטעים התקינים** מאורך n. תשובה עם סכימה תקבל ניקוד חלקי. יש לספק נימוק קצר לתשובתכם.

עבור $n<3$, הנתאי השני לא יכול להתקיים, ולכן מספר המקטעים החוקיים הוא

$$4^n - 3^n$$

עבור $n \geq 3$, מספר המקטעים בהם אין את האות G הוא 3^n.
מספר המקטעים בהם האות T מופיעה יותר מ־3 פעמים הוא

$$\sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} = (3+1)^n - \left(\binom{n}{0}3^n + \binom{n}{1}3^{n-1} + \binom{n}{2}3^{n-2}\right) = 4^n - 3^{n-2}\left(\binom{n}{2} + 3n + 9\right)$$

כאשר השוויון הראשון נובע משימוש בנוסחת הבינום.
מספר המקטעים בהם אין את האות G וגם האות T מופיעה יותר מ־3 פעמים הוא

$$\sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} = (2+1)^n - \left(\binom{n}{0}2^n + \binom{n}{1}2^{n-1} + \binom{n}{2}2^{n-2}\right) = 3^n - 2^{n-2}\left(\binom{n}{2} + 2n + 4\right)$$

מעיקרון ההכלה וההדחה מספר המקטעים התקינים הוא

$$4^n - 3^n - \left(4^n - 3^{n-2}\left(\binom{n}{2} + 3n + 9\right)\right) + \left(3^n - 2^{n-2}\left(\binom{n}{2} + 2n + 4\right)\right) =$$
$$3^{n-2}\left(\binom{n}{2} + 3n + 9\right) - 2^{n-2}\left(\binom{n}{2} + 2n + 4\right)$$

שאלה 5 (17 נקודות)

חברת הנדל"ן והמשחקים המפורסמת "האנוי מגדלים" הוציאה משחק חדש. החוקים של המשחק זהים לחוקים של המשחק מגדלי האנוי, אלא שישנם ארבעה עמודים במקום שלושה. כלומר, ישנן n דיסקיות בn גדלים שונים. בכל מצב חוקי, הדיסקיות מפוזרות לארבעה מגדלים שממוספרים 1 עד 4, בצורה כזו שאף דיסקית לא יושבת מעל דיסקית שקטנה ממנה. בכל מהלך חוקי מותר לשחקן להזיז דיסקית שיושבת בראש אחד המגדלים ולהעביר אותה לראשו של מגדל אחר.

נגדיר את הגרף G להיות גרף הקונפיגורציות של המשחק החדש. שתי קונפיגורציות הן שכנות אם יש מהלך חוקי במשחק שמעביר אותנו מהאחת לשנייה. כמה קודקודים יש בגרף? כמה קשתות? יש לספק נימוק קצר לתשובתיכם.

נמספר את הדיסקיות במספרים 1 עד n לפי הגודל שלהן. כדי לספור את מספר הקונפיגורציות, נשים לב שכל קונפיגורציה נקבעת לחלוטין מהחלוקה של דסקיות למגדלים. כלומר, מספיק להגיד אילו דיסקיות יושבות על כל אינדקס והסדר שלהן כבר נקבע ביחידות. מנגד, כל קונפיגורציה מגדירה אינדקס בין 1 ל4 לכל דיסקית. כלומר ישנה התאמה חד חד ערכית ועל בין קונפיגורציות חוקיות לבין פונקציות מ$\{1, \dots, n\}$ ל $\{1, 2, 3, 4\}$. לכן, יש לנו בסך הכל 4^n קונפיגורציות חוקיות.

באשר לכמות הקשתות, נשתמש במשפט $2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v)$ נפריד את הקונפיגורציות לארבע לפי כמות המגדלים הלא ריקים בקונפיגורציה. עבור קודקוד v, נסמן ב$t(v)$ את כמות המגדלים הלא ריקים בקונפיגורציה שהוא מייצג. ספירה פשוטה מראה ש

$$\deg(v) = \begin{cases} 3 & t(v) = 1 \\ 5 & t(v) = 2 \\ 6 & t(v) \in \{3, 4\} \end{cases}$$

קל לראות שישנם בדיוק ארבעה קודקודים עבורם $t(v) = 1$

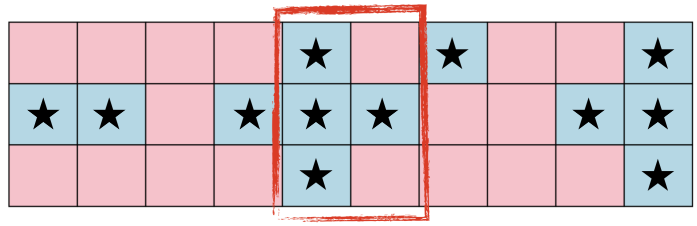
כדי לספור את כמות הקונפיגורציות שבהן ישנם בדיוק שני מגדלים לא ריקים, נתחיל בלבחור שני אינדקסים שעליהם נמקם את המגדלים הלא ריקים ב$\binom{4}{2}$ דרכים. לאחר מכן, נבחר אילו דיסקיות ישויכו לאחד המגדלים, והקונפיגורציה כולה תיקבע מאיליה. נוכל לבחור כל תת קבוצה של הדיסקיות, חוץ מהקבוצה הריקה וחוץ מהקבוצה כולה, כדי להבטיח ששני המגדלים שבחרנו לא יהיו ריקים. בסך הכל אלה $2^n - 2$ אפשרויות. בסך הכל קיבלנו שישנם $\binom{4}{2} \cdot (2^n - 2)$ קודקודים v כך ש$t(v) = 2$.

נסמן בV_i את קבוצת הקודקודים עבורם $t(v) = i$.

$$\begin{aligned} 2|E| &= \sum_{v \in V} \deg(v) = 3 \cdot |V_1| + 5 \cdot |V_2| + 6 \cdot (|V_3 \cup V_4|) \\ &= \sum_{v \in V} \deg(v) = 3 \cdot |V_1| + 5 \cdot |V_2| + 6 \cdot (|V| - |V_1| - |V_2|) \\ &= 12 + 5 \cdot \binom{4}{2} \cdot (2^n - 2) + 6 \cdot (4^n - 4 - \binom{4}{2}(2^n - 2)) \\ &= 12 + 30 \cdot 2^n - 60 + 6 \cdot 4^n - 24 - 36 \cdot 2^n + 72 \\ &= 6 \cdot (4^n - 2^n) \\ |E| &= 3 \cdot (4^n - 2^n) \end{aligned}$$

בתור בדיקת שפיות, אפשר להציב $n = 1$ ולצפות לקבל גרף מלא על ארבעה קודקודים, כלומר 6 קשתות שזה בדיוק מה שמקבלים.

שאלה 6 (17 נקודות)
יהא $n \geq 1$ מספר טבעי. צביעה של טבלה מגודל $3 \times n$ בשני צבעים ־ תכלת וורוד ־ תקרא ואן־גוכית אם התבנית הבאה אינה מופיעה:



כלומר, אין שתי עמודות רצופות בטבלה כך שהעמודה השמאלית יותר כולה צבועה בתכלת והעמודה העוקבת צבועה בתכלת במשבצת האמצעית ובורוד בשתי המשבצות הנותרות.

1. נסמן ב־v_n את מספר הצבעות הואן־גוכיות של טבלה עם n עמודות. מצאו נוסחת נסיגה עבור v_n. יש לספק נימוק קצר לתשובתכם.
2. פתרו את נוסחת הנסיגה.

נשים לב כי אם העמודה הראשונה אינה כולה תכולה, אז מספר הדרכים להמשיך את הצביעה כדי שתהיה חוקית הוא בדיוק v_{n-1} ישנן 7 דרכים לצבוע את העמודה הראשונה כך שזה המצב.
אם העמודה הראשונה כולה תכולה, עלינו להחסיר את מספר הצביעות עבורן העמודה השנייה היא ורוד־כחול־ורוד ולכן מספר הצביעות החוקיות במקרה זה הוא $v_{n-1} - v_{n-2}$
ובסך הכל

$$8v_{n-1} - v_{n-2}$$

כאשר תנאי ההתחלה הם $v_0 = 1, v_1 = 8$.
את נוסחת הנסידה נפתור בעזרת הפולינום האופייני שהוא

$$x^2 - 8x + 1$$

ושורשיו הם $x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{15}$. לכן, קיימים A, B כך ש־

$$v_n = A(4+\sqrt{15})^n + B(4-\sqrt{15})^n$$

נמצא אותם על ידי הצבה בתנאי ההתחלה:

$$\begin{aligned} 1 &= A + B \\ 8 &= A(4+\sqrt{15}) + B(4-\sqrt{15}) \end{aligned}$$

נפתור ונקבל

$$v_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{15}}\right)(4+\sqrt{15})^n + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{15}}\right)(4-\sqrt{15})^n$$

מסגרת נוספת למקרה הצורך: