

עיקרון הפכה

להפצה

ע"כ כ"כ



עיקרון היסודי - הזמנה לשם קדובל

לפיכך כי B היא זוגית כי

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

עבור קדובל A, B שיהיה.

מה אם A, B אינן שיהיה?

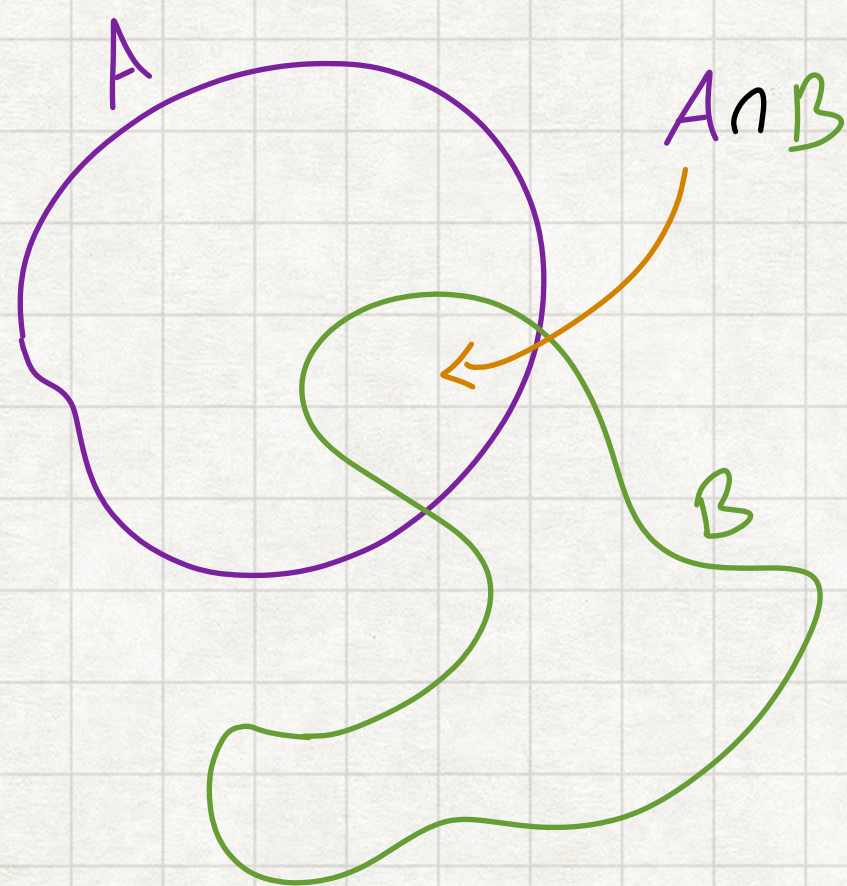
אם נספור את B האזורים A ואת B האזורים B -

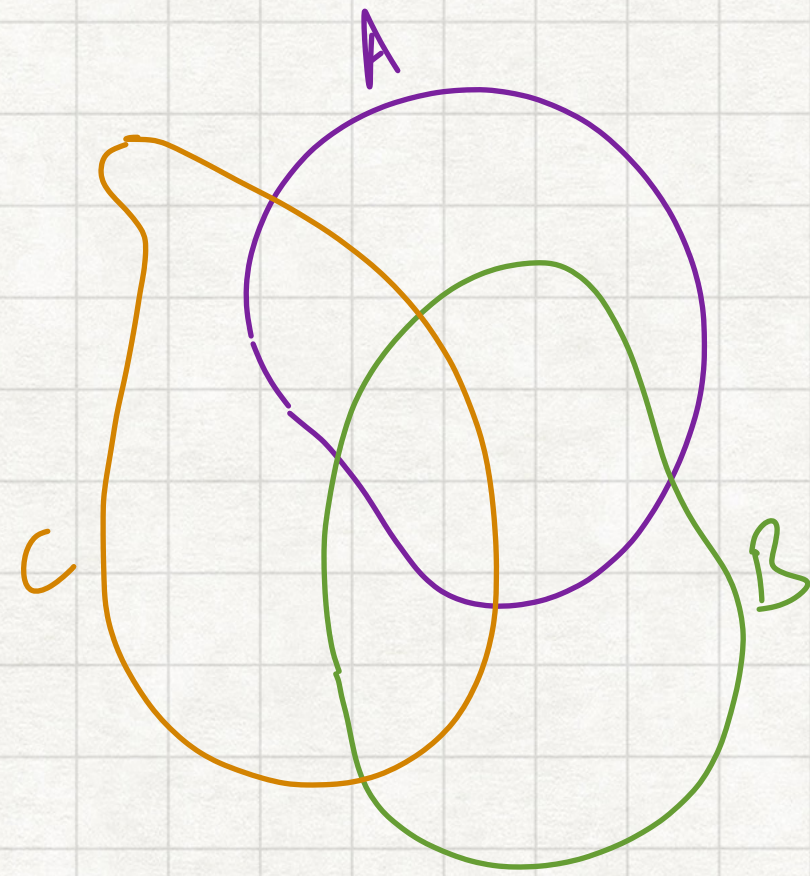
אז, את אותם אזורים שהיו $A \cap B$ "ספרו פעמיים" - פעם A -

פעם B . על כן "נתקן" את התשובה על ידי שנתנו 1 מהתשובה.

עבור B איזו שהיא נתקן כי

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

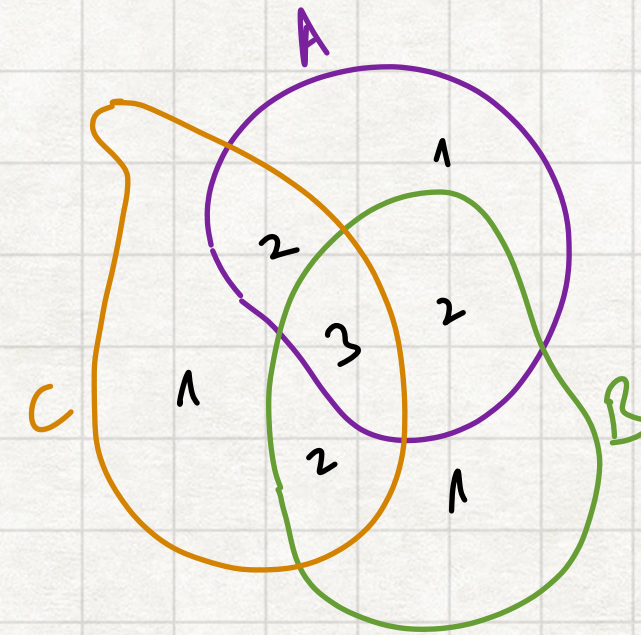


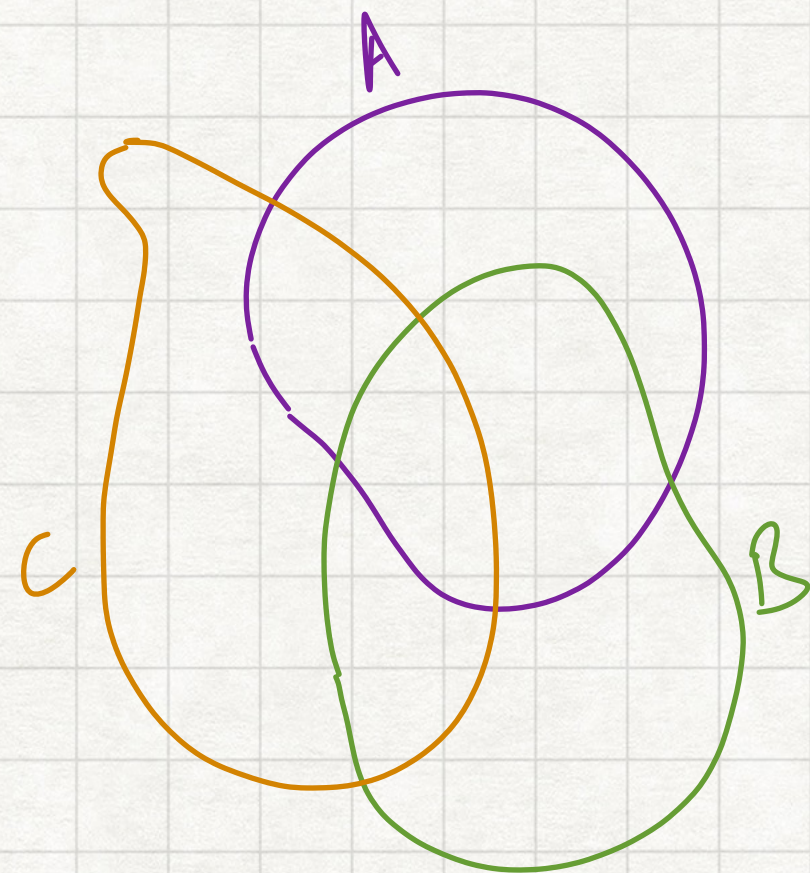


עיקרון ההכלה - הזמנה לשלש קבוצות →

כמו במקרה של קבוצות, נתיחם למספר ב איזו
 A-?, B-?, C-? מהי התוצאה דחיתובים.

$$|A| + |B| + |C| =$$

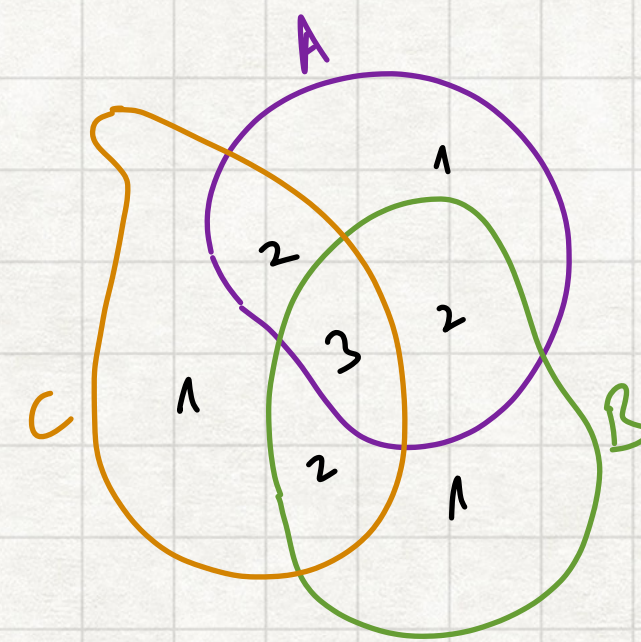




עיקרון ההכלה - הזתה לשלש קבוצות →

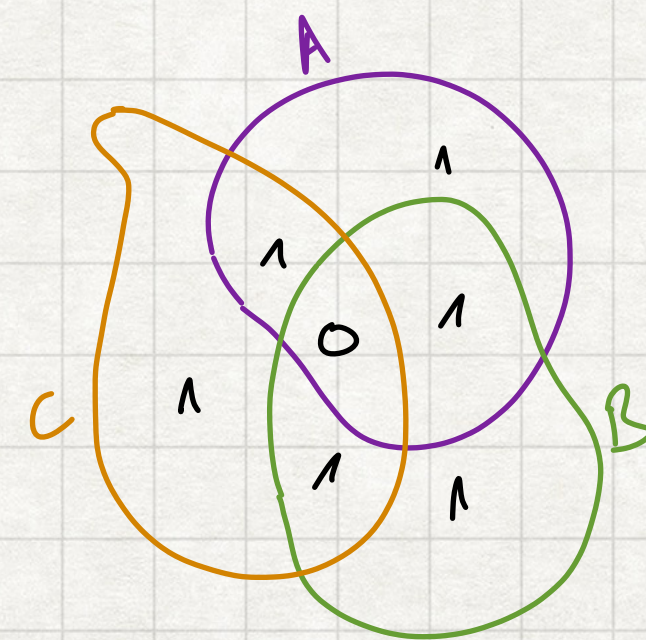
כמו במקרה של שתי קבוצות → נתיחם למספר ב איזה
 קבוצה A, B או C נכלי התחלה דתייטבים.

$$|A| + |B| + |C| =$$



כעת צריך לנתק את הדייטבים. נתיחם למספר את הדייטבים קטוע →

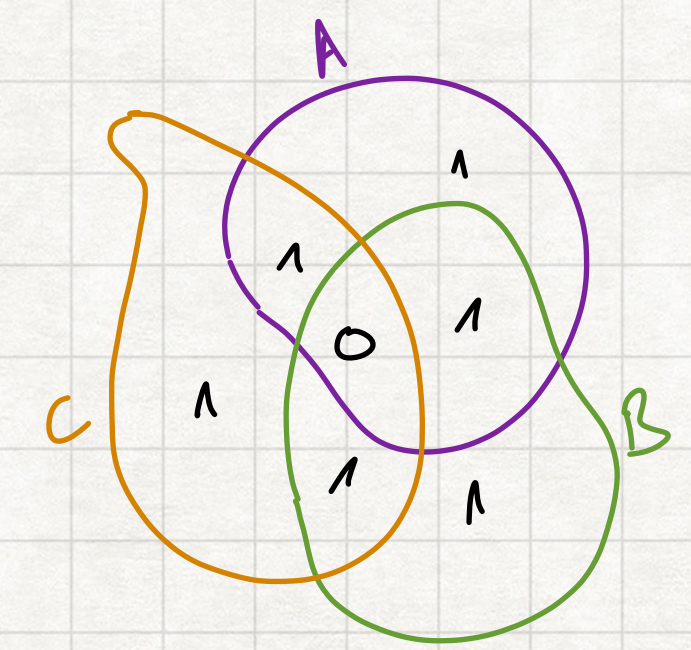
$$|A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) =$$



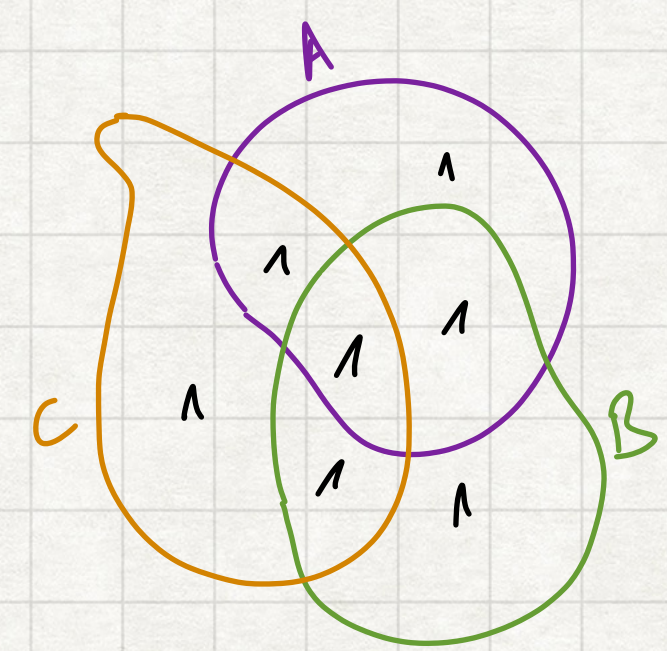
עיקרון היכלה - הזנה לפשו קחלו →

כעז ציור לתיקן אר התחבובים. נתחיל מלחסר אר התחבובים קסועל →

$$|A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) =$$



הגזמנו. נתקן ע"י כן הוזה אר $|A \cap B \cap C|$ ונקדם



$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + |A \cap B \cap C|$$

לאלה 1

כמה מספרים שלמים בין 1 ל-300 מתחלקים ל-3? ל-5? ל-15?

שאלה 1

כמה מספרים שלמים בין 1 ל-300 מתחלקים ל-3 או ל-5?

פתרון חזק

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 ...

לכן בין 1 ל-300 יש 7 מספרים, והתוצאה היא מתזויה. $8 \cdot 7$

התשובה היא

$$\frac{300}{15} \cdot 7 = 140$$

שאלה 1

כמה מספרים שלמים בין 1 ל-300 מתחלקים ל-3 או ל-5?

פתרון בצורה הכלה-הצטקה

נסו

$$A = \{n \in [300] : 3|n\}$$

$$B = \{n \in [300] : 5|n\}$$

המספרים אלו אינם זרים. $|A \cup B|$ קל לראות כי

$$|A| = \frac{300}{3} = 100$$

$$|B| = \frac{300}{5} = 60$$

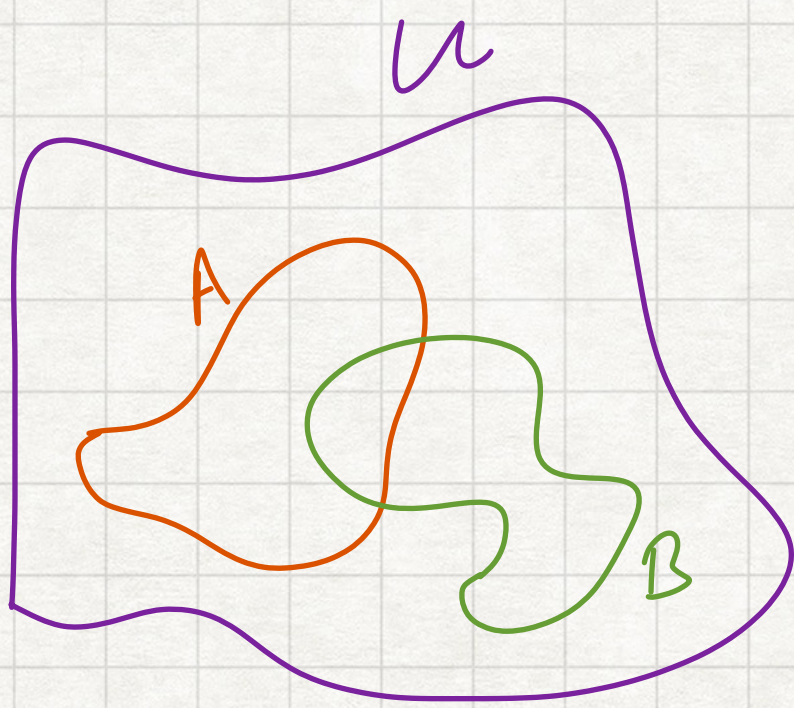
$$|A \cap B| = \frac{300}{15} = 20$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 100 + 60 - 20 = 140$$

ולכן

צ'יקרון ההכאה - הצחה המשלים עבור שני קבוצות

אציגה קבוצה \mathcal{U} עם קבוצות (A, B, \dots) תוכן שאל נכח עקיים
 ועל נמצאן לא $|A \cup B|$ אלא $|\bar{A} \cap \bar{B}|$ כשהמשלים הוא קיים
 לקבוצה \mathcal{U} כשלה.



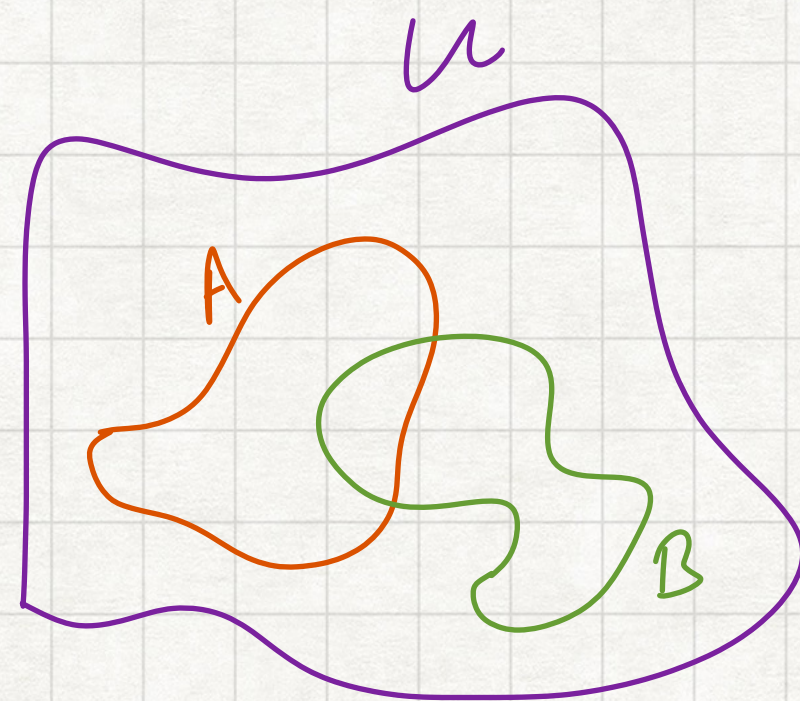
כל האיברים לאינם מקיימים
 את תכונת A ואינם מקיימים
 את תכונת B.

נמצא $|\bar{A} \cap \bar{B}|$ נוסחה נוסחה:

זה-אותו
 $|\bar{A} \cap \bar{B}| = |\overline{A \cup B}|$

המשלים נלקח קיים \mathcal{U} -
 $= |\mathcal{U}| - |A \cup B|$

צ'יקרון ההכאה - הצחה
 עלת קבוצה
 $= |\mathcal{U}| - (|A| + |B| - |A \cap B|)$
 $= |\mathcal{U}| - (|A| + |B|) + |A \cap B|.$



עיקרון ההכאה - הצחה המשלים עזר לנו קצת

$$|\bar{A} \cap \bar{B}| = |U| - (|A| + |B|) + |A \cap B|$$

מה עזר לנו שם קצת?

$$\begin{aligned}
 |\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}| &= |U| - (|A| + |B| + |C|) \\
 &\quad + (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) \\
 &\quad - |A \cap B \cap C|
 \end{aligned}$$

$$|\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}| = |U| - (|A| + |B| + |C|)$$

$$+ (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|)$$

$$- |A \cap B \cap C|$$

עמוד 2

נתונים 9 כזורים - 3 מהם צרע אדם, כחול וירוק כך שהכזורים

מלא צרע מהם.

א. כמה זרים ניתן לסדר את הכזורים לשורה?

ב. כמה אי רק שלם יהיו 3 כזורים סמוכים קאווי הצרע?

שאלה 2

נתונים 9 כדורים - 3 מהם צפצפים, אדום, כחול וירוק, כק להכדורים

מאט צפצפים.

א. כמה דרכים ניתן לסדר את הכדורים לשורה?

פתרון סעיף א'

אם הכדורים היו שונים היו אפשרות לסדרם לשורה.

לצורך ניסוי מחשבת כי נכתב קצתו - על כן מהם צפצפים אדום, ירוק, כחול, אדום, ירוק, כחול, אדום, ירוק, כחול.

1 2 1 3 3 2 2 1 3
⊙ ⊙ ⊙ ⊙ ⊙ ⊙ ⊙ ⊙ ⊙

2 3 1 2 3 1 2 1 3
⊙ ⊙ ⊙ ⊙ ⊙ ⊙ ⊙ ⊙ ⊙

3 2 1 1 3 2 2 3 1
⊙ ⊙ ⊙ ⊙ ⊙ ⊙ ⊙ ⊙ ⊙

שאלה 2

נתונים 9 כדורים - 3 מהם צבע אדום, כחול וירוק כגון להכדורים

מאט צבע זהים.

א. כמה דרכים ניתן לסדר את הכדורים לשורה?

פתרון סעיף א'

אם הכדורים היו שונים היו 9! אפשרויות לסדרם לשורה.

לצורך ניסוי מחשבת כי נכתב קצתו של א' כגון מהם צבע אדום, כחול וירוק כגון אחר.



ישנם סידורים אלו יצגו כאלו נחלק את המספרים להוספנו. לייב ציין ניתן

לחלק את הסידורים עם המספרים לקבוצות א אחר קבוצה $(3!)^3$ כגון שכל

הסידורים בה להיות את אלא הסידור הלא מאוסר, וקבוצה שונה לשורה

סידורים שונים. התשובה היא לכן

$$\frac{9!}{(3!)^3}$$

$$|\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}| = |U| - (|A| + |B| + |C|)$$

$$+ (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|)$$

$$- |A \cap B \cap C|$$

עמוד 2

נתונים 9 כזורים - 3 מהם צרע אדם, כחול וירוק כך שהכזורים

מלא צרע שהם.

? כמה אף רק שלא יהיו 3 כזורים סמוכים קאווי הצרע?

פתרון סעיף ב'

נסמן -

R את קזורת של הס'זורים קהם 3 הכזורים האדומים סמוכים.

B את קזורת של הס'זורים קהם 3 הכזורים הכחולים סמוכים.

G " " הירוקים סמוכים.

U את קזורת של הס'זורים.

אנן מעוניינים - $|\bar{R} \cap \bar{B} \cap \bar{G}|$ (כאשר המשלים הוא ביחס ל- U).

$$|\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}| = |U| - (|A| + |B| + |C|) + (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) - |A \cap B \cap C|$$

פתרון סגור?

נסמן ->

R את קבוצת כל הס'ורים בהם \exists הכזורים האדומים סמוכים.

B את קבוצת כל הס'ורים בהם \exists הכזורים הכחולים סמוכים.

G " " הירוקים סמוכים.

U את קבוצת כל הס'ורים.

אנן מעוניינים -> $|\bar{R} \cap \bar{B} \cap \bar{G}|$ (כאשר המספר הוא גודל U).

לצורך כך, ומסימטריה, מספיק לחשב את $|R \cap B \cap G|, |R \cap B|, |R|$.

$$|\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}| = |U| - (|A| + |B| + |C|) + (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) - |A \cap B \cap C|$$

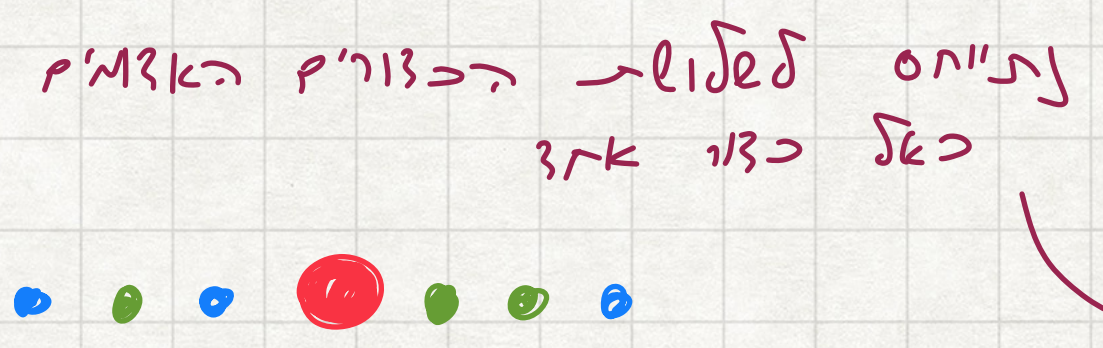
פתרון סגור?

נסמן ->

- R את קבוצת הסיפורים בהם צ הכזורים האזורים סמוכים.
- B את קבוצת הסיפורים בהם צ הכזורים הכחולים סמוכים.
- G " " הירוקים סמוכים.
- U את קבוצת הסיפורים.

אנן מעוניינים -> $|\bar{R} \cap \bar{B} \cap \bar{G}|$ (כאשר המשלים הוא גימס ד-ט).

לצורך כך, ומסימטריה, מספיק לחשב $|R \cap B \cap G|$, $|R \cap B|$, $|R|$.



$$|R| = \frac{7!}{(3!)^2}$$

$$|\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}| = |U| - (|A| + |B| + |C|) + (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) - |A \cap B \cap C|$$

פתרון סעיף ז'

נסמן ז-

- R את קבוצת כל הס'ורים בהם 3 הכזורים האדומים נמוכים.
- B את קבוצת כל הס'ורים בהם 3 הכזורים הכחולים נמוכים.
- G " " הירוקים נמוכים.
- U את קבוצת כל הס'ורים.

אנן מעוניינים ז- $|\bar{R} \cap \bar{B} \cap \bar{G}|$ (כאשר המשלים הוא ג'וס ז-ס. U.)

לצורך כך, ומסימטריה, מספיק לחשב $|R|, |R \cap B|, |R \cap B \cap G|$

נתייחס כאלו כזורי ארז לפנולו זכזורי האדומים



$$|R| = \frac{7!}{(3!)^2}$$

$$|R \cap B| = \frac{5!}{3!}$$

$$|R \cap B \cap G| = 3!$$



$$|\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}| = |U| - (|A| + |B| + |C|) + (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) - |A \cap B \cap C|$$

פתרון סגור?

נסמן ->

R את קבוצת הס'ורים בהם 3 הכזורים האדומים. סומכים.

B את קבוצת הס'ורים בהם 3 הכזורים הכחולים. סומכים.

G " " הירוקים. סומכים.

א את קבוצת הס'ורים.

$$|R| = \frac{7!}{(3!)^2}$$

$$|R \cap B| = \frac{5!}{3!}$$

$$|R \cap B \cap G| = 3!$$

$$|\bar{R} \cap \bar{B} \cap \bar{G}| = |U| - 3|R| + 3|R \cap B| - |R \cap B \cap G|$$

$$= \frac{9!}{(3!)^3} - \frac{3 \cdot 7!}{(3!)^2} + \frac{3 \cdot 5!}{3!} - 3!$$

נוסחת ההכללה - הציבה - המקרה הכללי

תהייה A_1, \dots, A_n קבוצות סופיות. אז

אנחנו מניחים שהיתוך של קבוצה
חיקה של קבוצות הוא קבוצה-
חיקה

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{S \subseteq [n]} (-1)^{|S|+1} \left| \bigcap_{j \in S} A_j \right|$$

בפרט, במקרה הספציפי בו $|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|$ אנו רוצים דגימה של האינדקסים
האלו i_1, \dots, i_k מתקיים

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \left| \bigcap_{j \in [k]} A_j \right|$$

נוסחת האינכלוד-העזבה - המקרה הכללי

נתונה קבוצות סופיות A_1, \dots, A_n

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq [n]} (-1)^{|S|+1} \left| \bigcap_{j \in S} A_j \right|$$

הוכחה

נקח $x \in \bigcup_{i=1}^n A_i$ x נמצא בדיוק k קבוצות A_i ו- k אינדיקסים i_1, \dots, i_k כך ש- $x \in A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}$ ו- $x \notin A_j$ לכל $j \notin \{i_1, \dots, i_k\}$.

$$T = \{i \in [n] \mid x \in A_i\} \quad \therefore |T| = k$$

נבחן כי המספר $(-1)^{|S|+1}$ בדיוק k עבור $S = T$ ו- 0 עבור $S \neq T$.

על כן יש $\binom{k}{k} = 1$ קבוצות S ש- $|S| = k$ ו- $x \in \bigcap_{j \in S} A_j$ ו- $x \notin A_j$ לכל $j \notin S$.

ולכן x נספר k פעמים

$$\sum_{k=1}^k (-1)^{k+1} \binom{k}{k} = 1$$

$$0 = \sum_{k=0}^k (-1)^k \binom{k}{k} \quad \text{ראוי כי}$$

נוסחת ההכללה - המקרה הכללי

תהייה A_1, \dots, A_n תתי-קבוצות של קבוצה סופית Ω . אז

$$|\bigcap_{j \in \phi} A_j| = \Omega \quad \text{עם התקנה } e$$
$$|\bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i| = \sum_{S \subseteq [n]} (-1)^{|S|} |\bigcap_{j \in S} A_j|$$

דבר דומה "הסימטרי"

$$|\bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i| = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} |\bigcap_{j \in [k]} A_j|$$

שאלה 3 - קצ"ח הפקיד השלם

פקיד שיכור הגיע לעבודה. הקוס שלו ביקש ממנו לשלוח את הכתובים δ -ח יוצאים.
מהו מספר האפשרויות לשלוח את הכתובים δ -ח ה"צ"ח שלף את יקל את הכתובים?

קניסה יתר פורמלי

תמורה על קבוצה A היא פונקציה \rightarrow שיוצא $\sigma: A \rightarrow A$.
מספר התמורות על קבוצה קטנה n הוא $n!$.

נאמר $a \in A$ היא נקודה \rightarrow על σ אם $\sigma(a) = a$.

קשורה 3 אנו שואלים כמה תמורות על $[n]$ שלם נקודות \rightarrow ישנו?

נסמן מספר \rightarrow D_n .

מתוך אלה 3

נסמן $u \rightarrow k$ קודם \rightarrow בסדר המוחלט $[n]$.

עבור $i \in [n]$ נסמן $A_i \rightarrow$ המוחלט i בנג' עבר.

כל העוצות \rightarrow

המקרה הספציפי של עקרון הכללי - הבהגה המשלים

$$\left| \bigcap_{i=1}^n \overline{A_i} \right| = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \left| \bigcap_{j \in [k]} A_j \right|$$

מספר המוחלט $[n]$ ב $k, \dots, 1$ הן נג' עבר

$$= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)!$$

$$= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k! \cancel{(n-k)!}} \cancel{(n-k)!}$$

$$= n! \cdot \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} = D_n$$

מתוך טבלה 3

$$D_n = n! \cdot \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

הערה

נ"ע ש"כ"ל נ"כ"ל נ"כ"ל נ"כ"ל נ"כ"ל נ"כ"ל

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{e}$$

ולכן $\frac{D_n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e}$. כלומר $D_n \sim \frac{n!}{e}$. כלומר $D_n \sim \frac{n!}{e}$!

אשר אפילו להוכיח כי

$$D_n = \begin{cases} \left\lfloor \frac{n!}{e} \right\rfloor & n \text{ זוגי} \\ \left\lceil \frac{n!}{e} \right\rceil & n \text{ אי-זוגי} \end{cases}$$

שאלה 4

תהי A קבוצה קבוצת א.

א. כמה פונקציות $f: A \rightarrow A$ יש?

ב. כמה פונקציות $f: A \rightarrow A$ עם נקודת שבת יש?

ג. כמה פונקציות $f: A \rightarrow A$ עם נקודת שבת יש?

ד. כמה פונקציות $f: A \rightarrow A$ עם נקודת שבת יש?

שאלה 4

תהי A קבוצה קצרה.

- א. כמה פונקציות $f: A \rightarrow A$ יש?
- ב. כמה פונקציות $f: A \rightarrow A$ נקראת שגור יש?
- ג. כמה פונקציות חז"ע $f: A \rightarrow A$ נקראת שגור יש?
- ד. כמה פונקציות זיוק $f: A \rightarrow A$ נקראת שגור יש?

פתרון

א. n^n , מעריקין הכפל.

שאלה 4

תהי A קבוצה קבוצת A .

א. כמה פונקציות $f: A \rightarrow A$ יש?

ב. כמה פונקציות $f: A \rightarrow A$ עם נקודת שבת יש?

ג. כמה פונקציות $f: A \rightarrow A$ עם נקודת שבת יש?

ד. כמה פונקציות $f: A \rightarrow A$ עם נקודת שבת יש?

פתרון

א. n^n , מעריקון הכפל.

ב. $(n-1)^n$ שזו מעריקון הכפל

שאלה 4

תהי A קבוצה קבוצת A .

א. כמה פונקציות $f: A \rightarrow A$ יש?

ד. כמה פונקציות $f: A \rightarrow A$ עם נקודת שבת יש?

ג. כמה פונקציות $f: A \rightarrow A$ עם נקודת שבת יש?

ב. כמה פונקציות $f: A \rightarrow A$ עם נקודת שבת יש?

פתרון

א. n^n , מעריקון הכפל.

ד. $(n-1)^n$ שזו מעריקון הכפל

ג.

ב. D_n כפי שהוכחנו.

שאלה 4

תהי A קבוצה קבוצת A .

א. כמה פונקציות $f: A \rightarrow A$ יש?

ד. כמה פונקציות $f: A \rightarrow A$ לא נקראת שגור יש?

ג. כמה פונקציות ח"ע $f: A \rightarrow A$ לא נקראת שגור יש?

ב. כמה פונקציות שיוק $f: A \rightarrow A$ לא נקראת שגור יש?

פתרון

א. n^n , מעריקין הכפל.

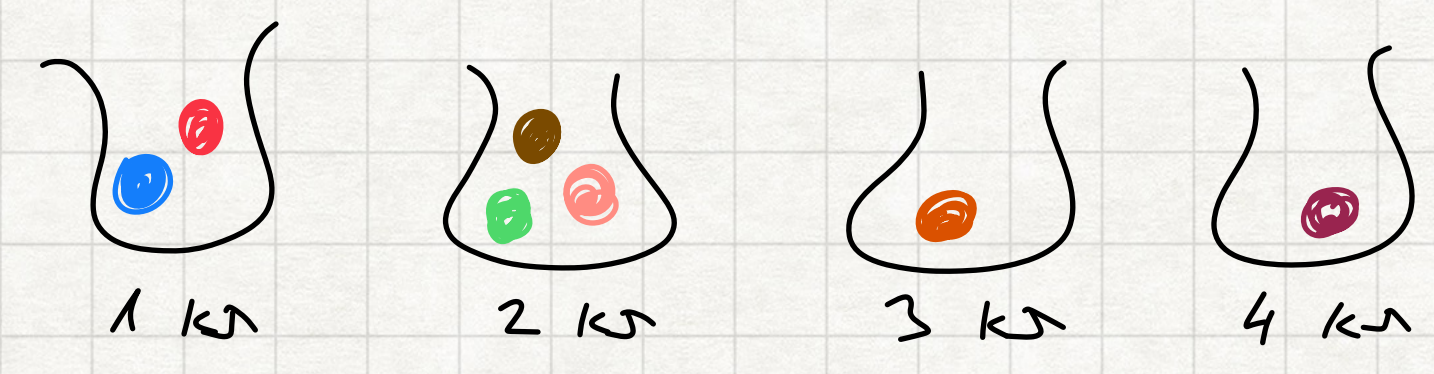
ד. $(n-1)^n$ שז מעריקון הכפל

ג. $\sum_{k=1}^n D_k$ לכן A סופית ולכן f מהיורה ח"ע $n-A$ לעצמה היא $\sum_{k=1}^n$ ולכן ש"ל.

ב. D_n כפי שהוכחנו.

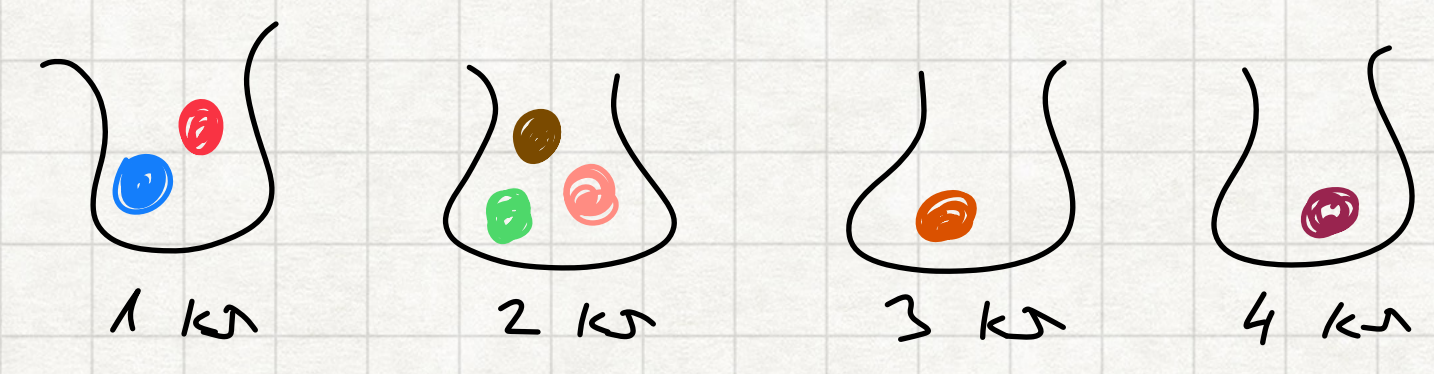
שאלה 5

דבנה אולפנס אפרה לחלק א כזורים שונים 8-4 הוא שניים כג לאל
הא לא "שאר ה"ק - ואין חסד - לסדר הכזורים קטן הוא?



שאלה 5

ד כמה אופן אפשר לחלק n כדורים שונים $n-4$ תאים שונים כך שלא תהא תא "שאר" היק - ואין תחת - לסדר הכדורים בתוך התאים?



פתרון לשני

הנה קטן קטן! נחמו 4 כדורים מתוך ה- n ונכנסם דפצרתם את התאים כך שיוקמה לשאר תא היק.

לכדין כך יש

$$n(n-1)(n-2)(n-3) = \binom{n}{4} \cdot 4!$$

קחיתם כדור מספר 1
קחיתם כדור מספר 2, תאלו שונות
עקר תא 2

נ' מלך אחת נחמו 4 כדורים מתוך ה- n נאכ נכסי קאת מחין 4! אפשרות לתאים השונים

אפשרות אחת לעשין זאת ניתין עם $n-4$ כדורים שנים ולכנס (מחלי לנצח לתיקנות התאים) יש 4^{n-4} אפשרות.

התשובה הסופית היא לכך $\binom{n}{4} \cdot 4! \cdot 4^{n-4}$

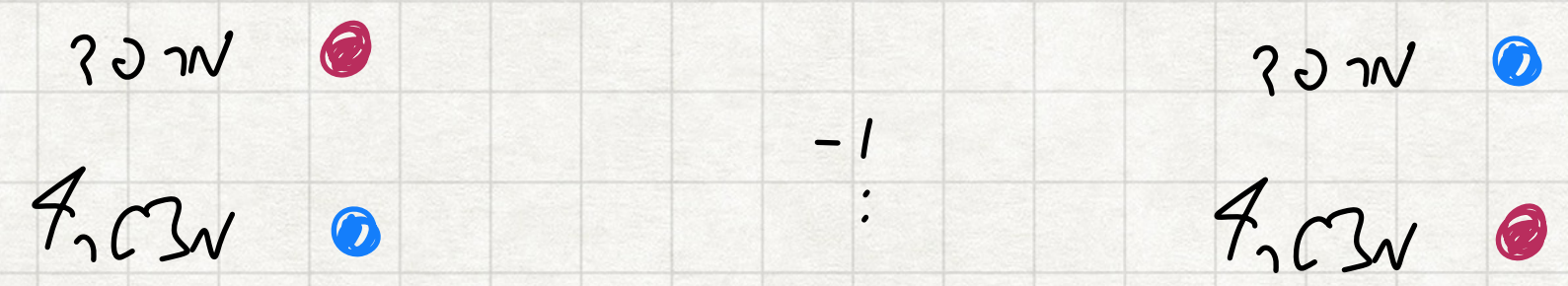
שאלה 5

ד כמה אופנים אפשר לחלק 4 כדורים שונים ל-4 תאים שונים כך שלא תהיה תא "שאר" היקף - ואין תיקון - לסדר הכדורים בתוך התאים?



הקציה דברתיון העיו

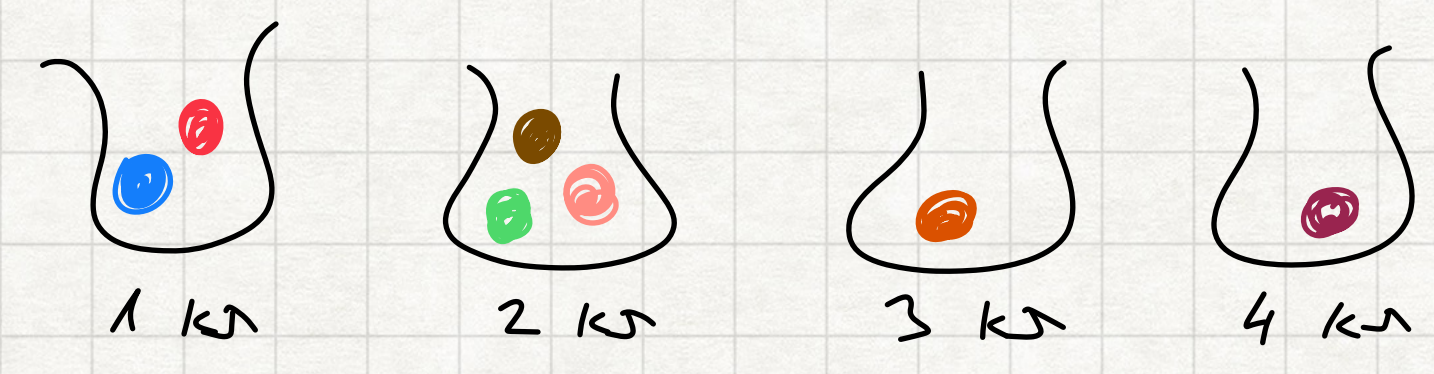
ביצע ספירה כפולה - מכיוון שאין תיקון - לסדר בתוך תא נתון, , אולם נספר פעמים:



דגרי הכנסת סוג א סדר הולאבות בתוך כל תא

שאלה 5

דבנה אופנים אפשר לחלק מ כדורים שונים ל-4 תאים שונים כך שלא
 תהא לא יילאר היק - ואין חסר - לסדר הכדורים קטן התאים?



פתרון (שורה ל' נכון ט')

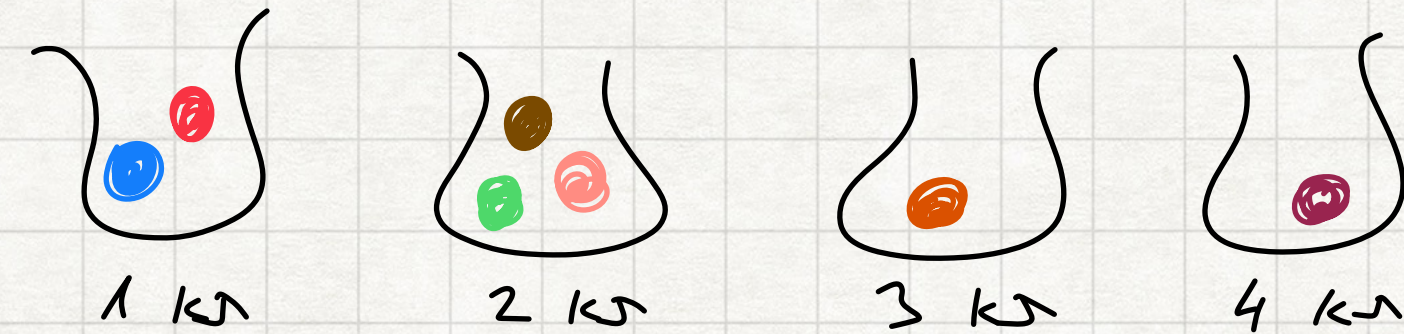
נצטר דהלה - היתה. נסמן?

- $A_1 = \text{כל הסיקורים ש מ הכדורים ל-4 התאים כך שמה 1 נלאר היק.}$
- \vdots
- $A_4 = \text{כל הסיקורים ש מ הכדורים ל-4 התאים כך שמה 4 נלאר היק.}$
- $U = \text{כל הסיקורים ש מ הכדורים ל-4 התאים ללא הקלו.}$

אין נאיונים $= |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4|$

שאלה 5

קבוצה אופנים אפשר לחלק מ כבורים שונים עם 4 מאם שונים כך לא
 תא לא ילאר היק - ואין חסר - לסדר הכבורים קטן המאם ?



פתרון (שורה פתוחה)

נצטר קבלה - הזמה. פס"ן ?

$A_1 = \{ \text{הסידורים שם מ הכבורים עם 4 המאם כך למא 1 נלאר היק} \}$
 \vdots

$A_4 = \{ \text{הסידורים שם מ הכבורים עם 4 המאם כך למא 4 נלאר היק} \}$

$U = \{ \text{הסידורים שם מ הכבורים עם 4 המאם ללא הקלו} \}$

אין מעינות $|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4|$

מסמכה, ומעיקרון הכללה הזמה, מספיק להשז א $|A_1 \cap A_2 \cap A_3|, |A_1 \cap A_2|, |A_1|, |U|, \dots, |A_1 \cap \dots \cap A_4|$

שאלה 5

דבנה אופנים אפשר לחלק n כדורים שונים $n-4$ תאים שונים כך לכל n תא לא יישאר ריק - ואין תא - לסדר הכדורים קטן תאים?



פתרון (שורה פתוחה)

נצטר דהנה - הנה. $\text{Total} = ?$

$A_i =$ כל הסיגורים n הכדורים $n-4$ תאים כך לתא i יישאר ריק.

$U =$ כל הסיגורים n הכדורים $n-4$ תאים תמיד תמיד.

$$|U| = 4^n$$

$$|A_1| = 3^n$$

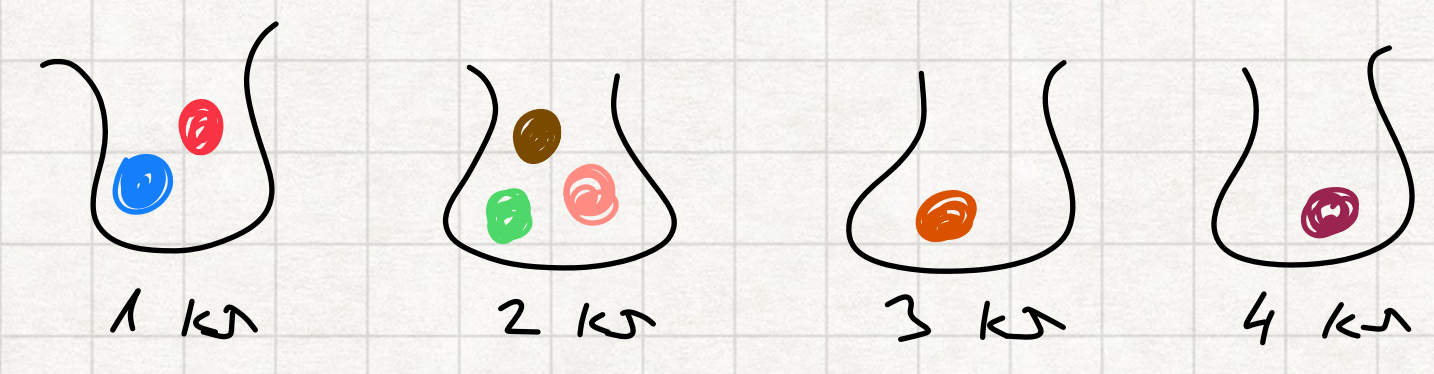
$$|A_1 \cap A_2| = 2^n$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 1$$

$$|A_1 \cap \dots \cap A_4| = 0$$

שאלה 5

דבנה אולניק אפשר לחלק n כדורים שונים $4-8$ תאים שונים כך לכל i תא לא יילאר היק - ואין תא - לסדר הכדורים קטן תאים?



פתרון (שיטה של פול סטי) -

נצטר קבלה - היתה. פול -

$A_i =$ כל הכדורים ש n הכדורים $4-8$ תאים כך לתא i ילאר היק.
 $A =$ כל הכדורים ש n הכדורים $4-8$ תאים עלא הקלא.

$|U| = 4^n$

$|A_1| = 3^n$

$|A_1 \cap A_2| = 2^n$

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 1$

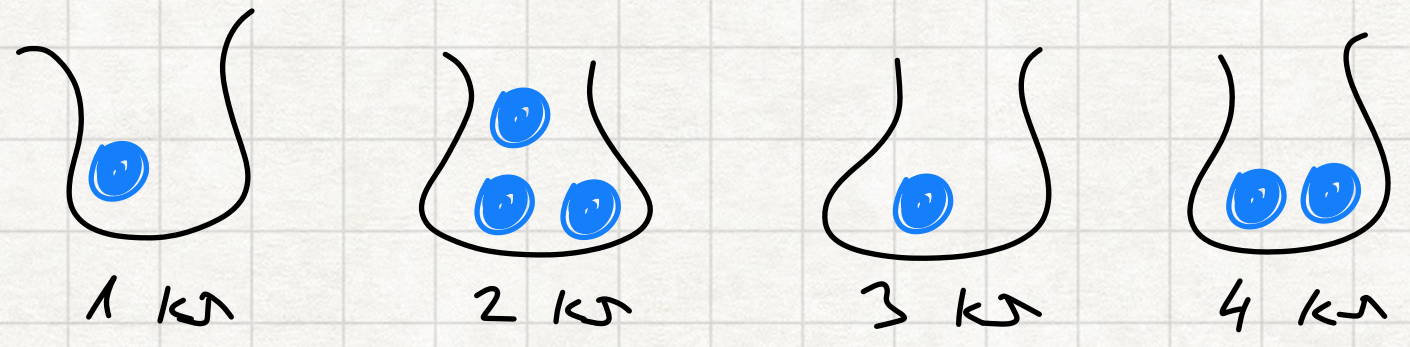
$|A_1 \cap \dots \cap A_4| = 0$

$\Rightarrow |\bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_4| = |U| - 4|A_1| + 6|A_2| - 4|A_3| + |A_4|$
 $= 4^n - 4 \cdot 3^n + 6 \cdot 2^n - 4$

$|\bar{\bigcap}_{i=1}^n A_i| = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} |\bigcap_{j \in [k]} A_j|$

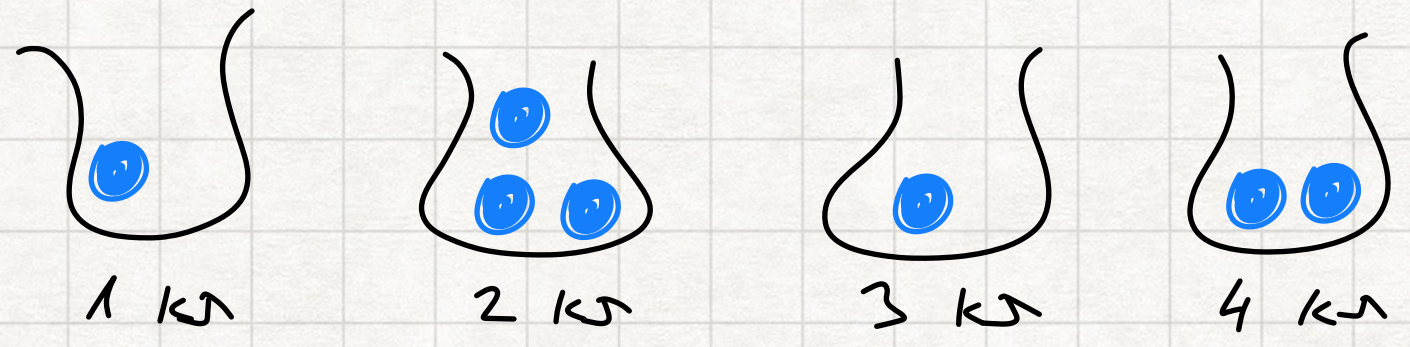
שאלה 5

ד כמה אולנים אפשר לחלק א כזורים ~~שנים~~ ^{שנים} 4-8 מאי שנים כן לא?
א לא ילאר ה'ק - אין חסר - לסדר בכזורים קטן מאי ?



שאלה 5

ד כמה אופנים אפשר לחלק n כדורים שונים ~~שונים~~ ^{שהם} $8-4$ מאר שונים כך לא
תא לא ילאר ריק - ואין חסר - לסדר הכדורים קטן המאוס?

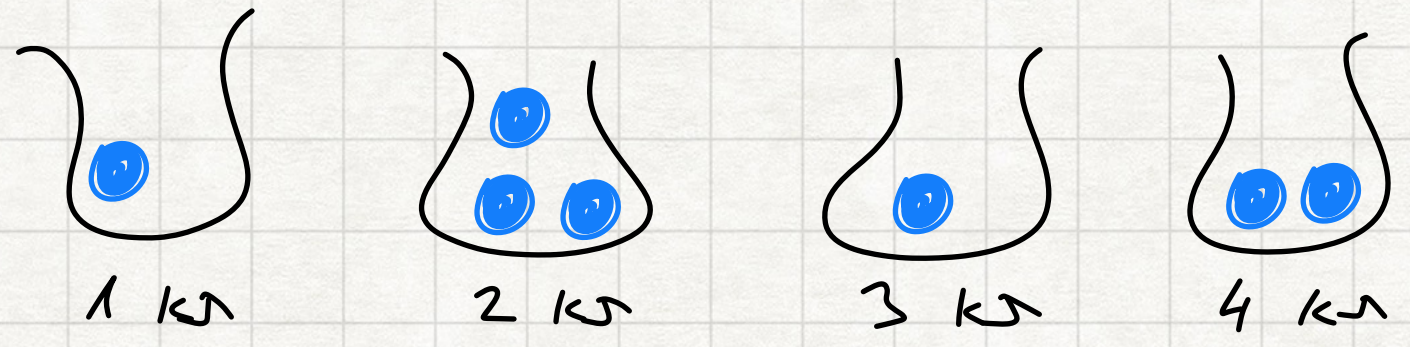


שה ציקרון הבאה - זהה?

דציקרון שה נימ אפשר קצת דמה. חילוק אק! אכל צי דהתא לא
הפתרון המובנה יותר שכן הוא ינתן קצת סכימה.

שאלה 5

קבוצה אופנים אפשר לחלק א כזורים ~~שונים~~ ^{שהם} 4-8 מאם שונים כך לא
תא לא "שאר ה"ק - ואין חסר - לסדר בכזורים קטן המאם ?



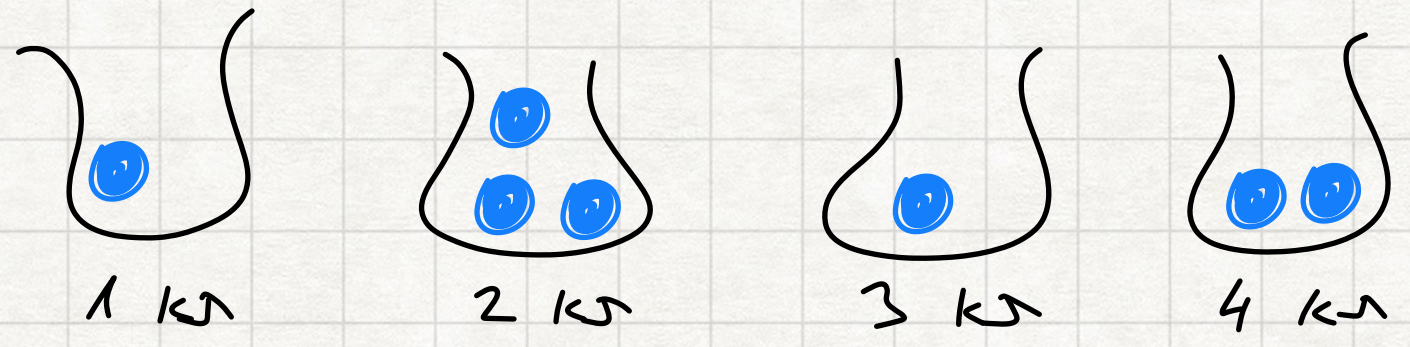
פתרון

נבחין כי ב פתרון מתקף ע"י כך שנתיה במה כזורים יש קב תא וקבול לק שלב תא
ישן לפתור - כדור אחד. בואו, אין מאוננים קמסר הפתרון - למעשה

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 8 \\ X_1, \dots, X_4 \geq 1 \end{cases}$$

שאלה 5

ד כמה אופן אפשר לחלק n כדורים שונים ~~שונים~~ ^{זהים} $n-4$ מאם שונים כך לא?
 וא לא י"שאר ריק - ואן חסר - לסדר בכדורים קטן המאם?



פתרון

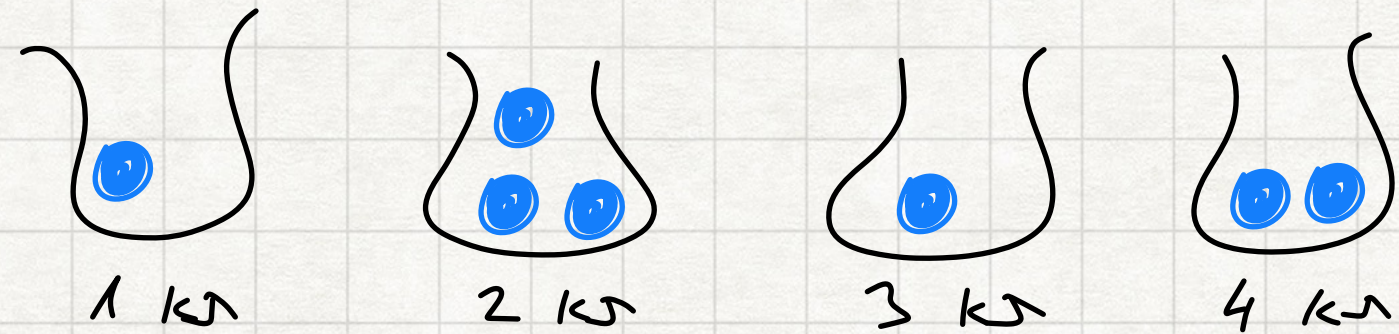
נבחין כי בפתרון מתקף ע"כ שכל כדור יכיל לפחות אבן אחת
 יש לפתור כדור אחד. כלומר, אף מאוננים קמסר הפתרון למערכה

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n \\ x_1, \dots, x_4 \geq 1 \end{cases}$$

אם היה הפתרון $x_i \geq 0 \forall i$, היתה אולי כפי שכתבתי הוא $\binom{n+3}{3}$

שאלה 5

כמה אופנים אפשר לחלק n כדורים שונים ~~שונים~~ ^{זהים} $n-4$ הוא שניים כך לכל
תא לא יישאר ריק - ואין חסר - לסדר הכדורים קטן הוא?



פתרון

אין מיליונים קמפס פתרון - למעשה

$$(*) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n \\ x_1, \dots, x_4 \geq 1 \end{cases}$$

אם היה התנאי $x_i \geq 0$ במקום, הפתרון כפי שהיון הוא $\binom{n-3}{3}$

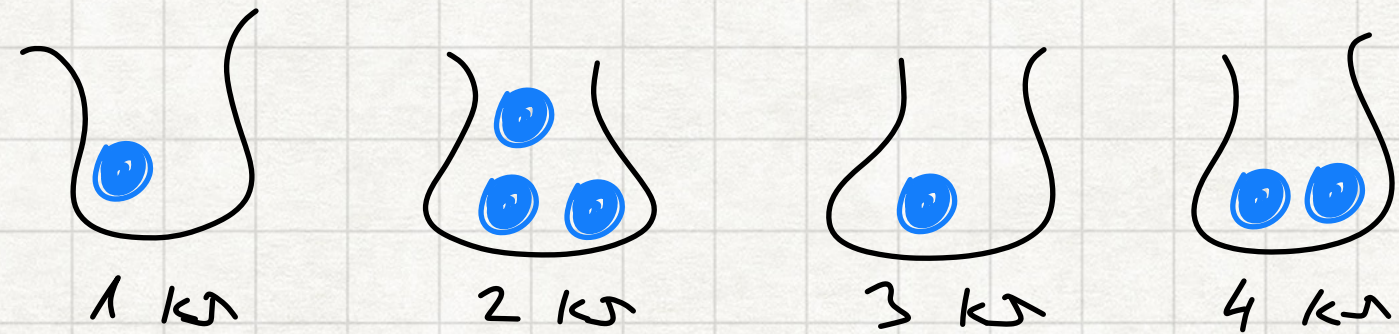
$$(**) \begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = n-4 \\ y_1, \dots, y_4 \geq 0 \end{cases}$$

נבחר n פתרון - למעשה $(*)$ נחלים כזיון עם פתרון - למעשה
אכן - הזיון ניתן ע"י

$$(x_1, \dots, x_4) \mapsto (\underbrace{x_1-1}_{y_1}, \dots, \underbrace{x_4-1}_{y_4})$$

שאלה 5

ד כמה אופנים אפשר לחלק n כדורים שונים ~~שונים~~ ^{זהים} $n-4$ הוא שניים כך לכל
תא לא יישאר ריק - ואין חסר - לסדר הכדורים קטן הוא?



פתרון

אין אופנים להסיר הכדורים →

$$(*) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n \\ x_1, \dots, x_4 \geq 1 \end{cases}$$

אם היה התנאי $x_i \geq 0$ במקום, הפתרון כפי שהיון הוא $\binom{n+3}{3}$

$$(**) \begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = n-4 \\ y_1, \dots, y_4 \geq 0 \end{cases}$$

נקח את פתרון → במקום $(*)$ נחליט כזו עם פתרון →

אכן - הזיווג נתון ע"י $(x_1, \dots, x_4) \mapsto (\underbrace{x_1-1}_{y_1}, \dots, \underbrace{x_4-1}_{y_4})$

$$\leftarrow \text{הפתרון הוא } \binom{(n-4)+3}{3} = \binom{n-1}{3}$$

1	5	3	2	4
3	4	1	5	2

שאלה 6

כמה מחיבור $2 \times n$ ישן עם הערכים $n, \dots, 1$ כך שקבלו שורה וקבלו
 עמולה יש ערכים שונים?

פתרון

ישן! זהו זרימים למלא את השורה הראשונה.
 עכ"פ אפשרות יש D_n זרימים למלא את השורה השנייה.

\Leftarrow הטרנספורם היא $D_n \cdot n!$.