זהויות קומבינטוריות

גיל כהן

שאלה 1

הוכיחו כי לכל $0 \leq k \leq n$ מתקיים

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

שאלה 1

הוכיחו כי לכל $0 \leq k \leq n$ מתקיים

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

פתרון אריתמטי

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{n-k}$$

שאלה 1

הוכיחו כי לכל $0 \le k \le n$ מתקיים $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

פתרון קומבינטורי

$\binom{n}{k}$ = מספר הדרכים לבחור k איבר מתוך n (בלי חזרות וללא חשיבות לסדר).

אבל בחירה של אילו $n-k$ איברים "ישארו בחוץ" שקולה לבחירת k איברים.

פורמלית ישנו הזיווג:

$$f : \{A \subseteq [n] \mid |A| = k\} \longrightarrow \{B \subseteq [n] \mid |B| = n-k\}$$

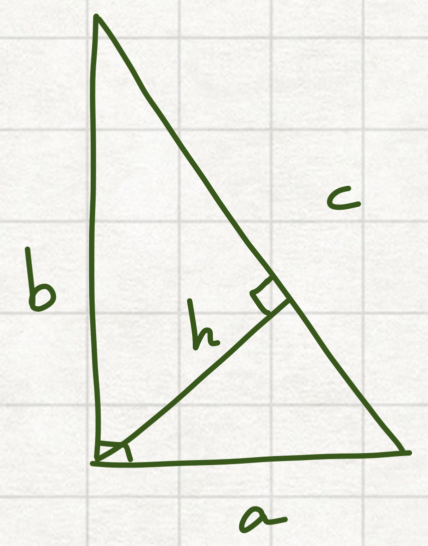
$$A \longmapsto [n] \setminus A$$

גודל קבוצה זו הוא $\binom{n}{k}$

קבוצה בגודל $\binom{n}{n-k}$

ספירה כפולה

לעיתים נרצה להראות ששני ביטויים שווים. ספירה כפולה (Double counting) היא דרך לעשות זאת ע"י כך שמראים ששני הביטויים שווים לגודל שלישי. באופן ספציפי, בקומבינטוריקה מראים ששני הביטויים הם גודל קבוצה נתונה כפי שנספר בשתי דרכים שונות.



הוכיחו כי $ab=ch$

שאלה 2

הוכיחו כי

$$2^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$

שאלה 2

הוכיחו כי $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

פתרון

נשאל - מהו מספר המחרוזות הבינאריות באורך n?

מכלל הכפל: לכל כניסה במחרוזת יש 2 אפשרויות

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

מספר המחרוזות הבינאריות עם בדיוק k אחדים

חלוקה לפי מספר האחדים במחרוזת, k, ושימוש בעיקרון החיבור

שאלה 3

מהו ערכו של הביטוי $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$?

שאלה 3

מהו ערכו של הביטוי $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$?

ננסה את $n=3$

$$\binom{3}{0}-\binom{3}{1}+\binom{3}{2}-\binom{3}{3}=0$$

שאלה 3

מהו ערכו של הביטוי $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$?

ננסה את $n=3$

$$\binom{3}{0} - \binom{3}{1} + \binom{3}{2} - \binom{3}{3} = 0$$

אותו דבר עבור $n=5$

$$\binom{5}{0} + \binom{5}{2} + \binom{5}{4} - \left[\binom{5}{5} + \binom{5}{3} + \binom{5}{1} \right] = 0$$

שאלה 3

מהו ערכו של הביטוי $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$?

ובאופן כללי עבור n אי-זוגי

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^k\binom{n}{k}+(-1)^{n-k}\binom{n}{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^k\underbrace{\left(\binom{n}{k}-\binom{n}{k}\right)}_{=0} = 0$$

שאלה 3

מהו ערכו של הביטוי: $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$?

מה אם n זוגי?

ננסה $n=2$

$$\binom{2}{0} - \binom{2}{1} + \binom{2}{2} = 1-2+1 = 0$$

שאלה 3

מהו ערכו של הביטוי: $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$?

מה אם n זוגי?

נניח $n=2$

$$\binom{2}{0}-\binom{2}{1}+\binom{2}{2} = 1-2+1 = 0$$

אולי... $n=4$:

$$\binom{4}{0}-\binom{4}{1}+\binom{4}{2}-\binom{4}{3}+\binom{4}{4} = 1-4+6-4+1 = 0$$

שאלה 3

מהו ערכו של הביטוי $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$?

מה אם n זוגי?

ננסה $n=2$

$$\binom{2}{0}-\binom{2}{1}+\binom{2}{2} = 1-2+1 = 0$$

אוק ... $n=4$:

$$\binom{4}{0}-\binom{4}{1}+\binom{4}{2}-\binom{4}{3}+\binom{4}{4} = 1-4+6-4+1 = 0$$

ועבור $n=6$:

$$\binom{6}{0}-\binom{6}{1}+\binom{6}{2}-\binom{6}{3}+\binom{6}{4}-\binom{6}{5}+\binom{6}{6}$$

$$1-6+15-20+15-6+1$$

שאלה 3

מהו ערכו של הביטוי $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$?

פתרון

נרצה להראות שמספר תתי הקבוצות של $[n]$ בגודל זוגי שווה למספר

תתי הקבוצות של $[n]$ בגודל אי-זוגי, כלומר

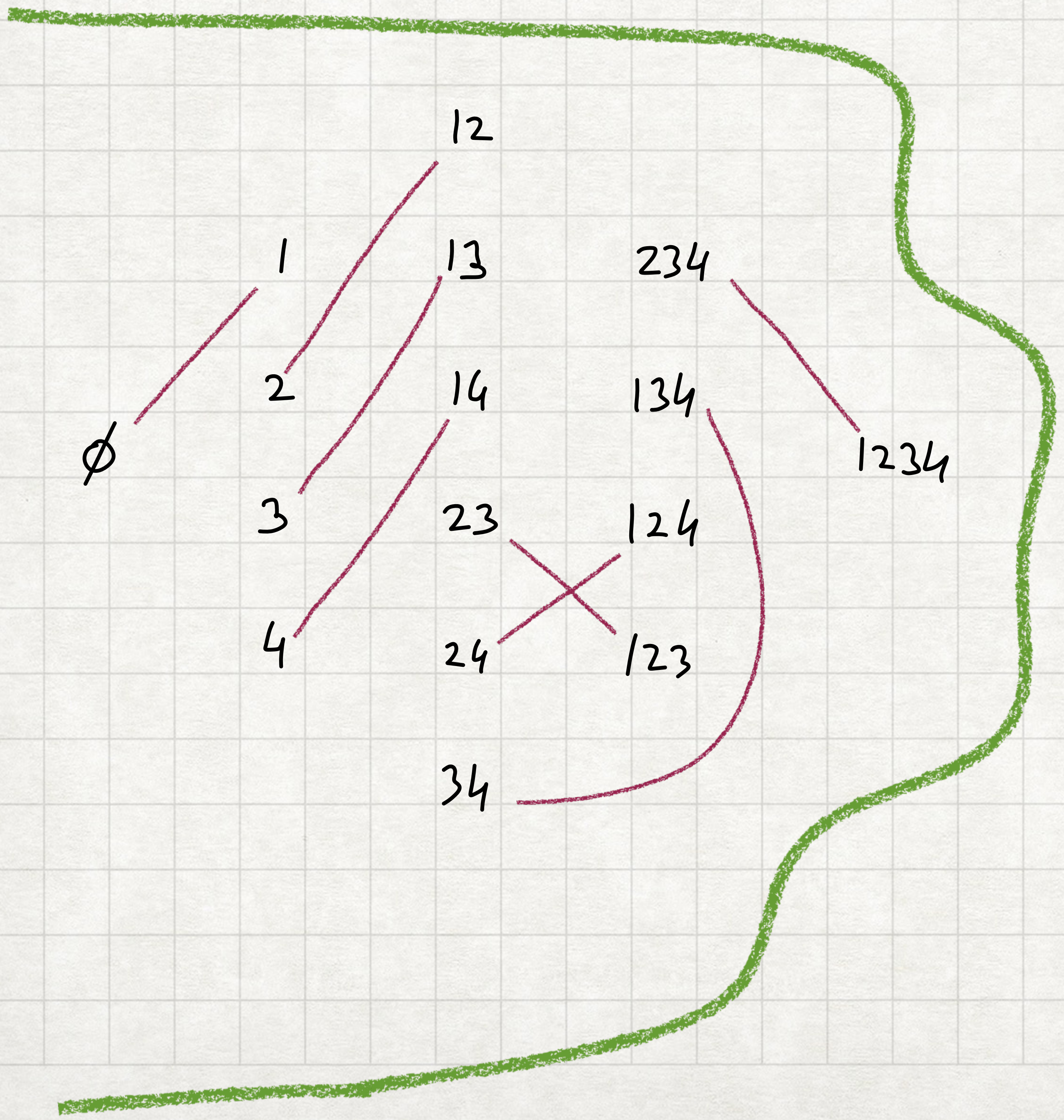
$$\sum_{\substack{k=0 \\ \text{זוגי}}}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{\substack{k=0 \\ \text{אי זוגי}}}^{n} \binom{n}{k}$$

נגדיר

$$f: \{A \subseteq [n] \mid |A| \text{ זוגי}\} \to \{B \subseteq [n] \mid |B| \text{ אי זוגי}\}$$

f זיווג!

$$A \longmapsto \begin{cases} A \setminus \{1\} & 1 \in A \\ A \cup \{1\} & 1 \notin A \end{cases}$$



שאלה 4

הוכיחו כי לכל $0 \le k \le n$ מתקיים

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$$

שאלה 4

הוכיחו כי לכל $0 \leq k \leq n$ מתקיים

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$$

הכתרנו מלך

פשוטי העם שנאמנים אליו

פתרון

כלומר נשאל - כמה תתי קבוצות של $[n]$ ישנן עם איבר מסומן (המלך).

דוגמה $n=3$

$\hat{3}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$
$\hat{3}1$	$\hat{2}1$	$\hat{1}2$
$\hat{3}2$	$\hat{2}3$	$\hat{1}3$
$\hat{3}12$	$\hat{2}13$	$\hat{1}23$

$\underline{\underline{12}}$

שאלה 4

הוכיחו כי לכל $0\le k\le n$ מתקיים

פתרון

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n\cdot 2^{n-1}$$

הכתרני מלך

פשוטי העם שנאמנים אליו

דוגמה $n=3$

$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{1}2$	$\hat{2}1$	$\hat{3}1$
$\hat{1}3$	$\hat{2}3$	$\hat{3}2$
$\hat{1}23$	$\hat{2}13$	$\hat{3}12$

$\underline{\underline{12}}$

כלומר נשאל - כמה תתי קבוצות של $[n]$ ישנן עם איבר מסוים (המלך).

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k$$

להכתיר מלך

לבחור k איברים לממלכה

חלוקה למקרים לפי גודל הקבוצה