TEL AVIV UNIVERSITY אוניברסיטת תל אביב

**מתמטיקה בדידה 2** **אביב תשפ"ד**

# מבחן ־ מועד א ־ פתרון

תאריך: 14/08/2024

סגל הקורס: מיכל פלדמן, אמיר רובינשטיין, יותם דביר, יואב גל־צור, תומר מנקט, רז לוטן, איתי תשובה

- משך הבחינה: שלוש שעות.
- השימוש במחשבון אסור.
- השימוש בחומר עזר אסור פרט לדף $A4$ דו־צדדי או שני דפי $A4$ חד־צדדיים. לקבוצה 28 ואחרים הזכאים לדף מורחב מותר השימוש בשני דפי $A4$ דו־צדדיים או ארבעה דפי $A4$ חד־צדדיים.
- את התשובות יש לרשום רק על טופס הבחינה. מחברת הבחינה משמשת כטיוטה ולא תיבדק.
- יש לרשום מספר ת.ז. ומספר מחברת בראש כל אחד מהדפים בטופס.
- בטופס 10 עמודים, לא כולל עמוד זה, הכוללים 5 שאלות, ושאלת בונוס נוספת לקבוצה 28, ועמוד עם מסגרת נוספת למקרה הצורך.
- ערכן של כל 5 השאלות, להוציא שאלת הבונוס, מסתכם ל־100 נקודות. ערכה של שאלת הבונוס הוא 5 נקודות, כך שסטודנטים מקבוצה 28 יכולים להגיע לציון של 105 נקודות. בכל מקרה, ציון המבחן הסופי יעוגל למטה, במקרה הצורך, ל־100.
- יש לכתוב את כל התשובות במקום המוקצב ובכתב קריא. תשובות ובהן חריגות לא זניחות מהמקום המוקצב, או תשובות הכתובות בכתב קטן באופן קיצוני או לא ברור לא ייקראו ולא יקבלו ניקוד, או שיקבלו ניקוד חלקי בלבד. תשובות שדורשות מאמצים רבים להבנתן גם כן עלולות לגרור הורדת ציון.
- לכן, מומלץ בחום לפתור ראשית במחברת ואז לרשום פתרון מסודר במסגרת.
- ניתן לרשום "אינני יודע/ת" כתשובה לשאלה או סעיף שלה, פרט לשאלת הבונוס, ולקבל 20% מהניקוד. במקרה זה אין להוסיף שום הסבר ו/או לסמן את אחת האפשרויות.
- בתשובות מותר להשאיר סימונים שנלמדו עבור ספירות בסיסיות (עצרת, מקדם בינומי), מספרי פיבונאצ'י, מספרי קטלאן, מספרי בל, מספרי סטרלינג מהסוג השני, דוור שיכור, וסימונים נוספים שראינו בהרצאה.

**בהצלחה!**

**שאלה 1** (20 נקודות) נתבונן בסדרות מהצורה $x_1, \ldots, x_{3n}$ שבהן יש $n$ פעמים $0$, $n$ פעמים $1$ ו־$n$ פעמים $-1$.

א. (6 נק') מה גודל קבוצת כל הסדרות הללו? הסבירו בקצרה.

**תשובה:** $\binom{3n}{n}\binom{2n}{n}$

**הסבר:** נבחר מיקומים עבור ה־$1$־ים, ואז מהמקומות הנותרים נבחר מיקומים ל־$0$־ים. את ה־$-1$־ים נמקם בכל המקומות הנותרים.

**פתרון אלטרנטיבי:** $\frac{(3n)!}{(n!)^3}$ כשהרעיון הוא למקם את התווים כאילו הם שונים ואז לחלק בסידורים פנימיים כדי לפצות על כך.

**פתרון אלטרנטיבי:** $S(n+1,n)S(2n+1,n)$ כשהרעיון הוא למקם את התווים $1$ כמחיצות ולשים את ה־$0$־ים ככדורים, ואז להתייחס לכל מי שמוקם כמחיצות שוב ולמקם את ה־$-1$־ים ככדורים.

**שגיאה נפוצה:** $3!\binom{3n}{n}\binom{2n}{n}$ במחשבה שהביטוי $\binom{3n}{n}\binom{2n}{n}$ סופר רק עבור סדר מסויים שבו ממקמים את הספרות, ולכן צריך להכפיל ב־$3!$ כדי לקבל את כל הסידורים. השגיאה כאן היא שאין חשיבות לתהליך שבו אנחנו ממקמים את הספרות, אלא רק לסדרה שמתקבלת בסוף.

ב. (7 נק') כמה סדרות כאלו יש כך ש־$\sum_{k=1}^{m} x_k \geq 0$ לכל $m \in [3n]$. הסבירו בקצרה.

**תשובה:** $C_n\binom{3n}{n}$

**הסבר:** יש $C_n$ דרכים לסדר $n$ מופעים של $1$ ו־$n$ מופעים של $-1$ באופן שלכל רישא יש סכום חיובי, לפי הקבלה של $1$ לסוגר פותח ו־$-1$ לסוגר סוגר. עבור כל סידור כזה יש $\binom{3n}{n}$ סדרות כמבוקש, על־פי בחירת המיקומים של ה־$0$־ים, כאשר בשאר המקומות נשים את הסידור קטלן שהתחלנו ממנו. המפתח כאן הוא שה־$0$־ים לא משפיעים על הסכום.

**פתרון אלטרנטיבי:** $C_nS(2n+1,n)$ כשהרעיון הוא שלאחר שממקמים את $1$ ו־$-1$ לפי קטלן, ממקמים את ה־$0$־ים בתאים הנחצצים על־ידי $1$ ו־$-1$.

**שגיאה נפוצה:** פתרונות שבהם $m$ לוקח חלק בפתרון, כגון $\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}C_{m-i}$. אבל $m$ הוא לא פרמטר של הבעיה בכלל.
יש תנאי שאומר שסכום כל ריישא הוא אי־שלילי, שם במקרה השתמשנו באות $m$ כדי לציין את אורך הריישא, בעודנו עוברים על כל הריישות. זה שם זמני לצורך ניסוח התנאי.

ג. (7 נק') כמה סדרות כאלו יש כך ש־$x_{3m+1}+x_{3m+2}+x_{3m+3}=0$ לכל $m\in\{0,\dots,n-1\}$? הסבירו בקצרה.

**תשובה:** $(3!)^n$

**הסבר:** השלשות היחידות המותרות, עד כדי סידור, הן $0,0,0$ ו־ $-1,+1,0$ אבל אם תהיה שלשה מהסוג הראשון יהיו יותר מידי אפסים בסדרה, לכן כל השלשות מהסוג השני. מכאן נותר רק לבחור סדר לכל שלשה.

**שאלה 2** ($20$ נקודות) נגדיר **מטריצה־בראש־אחר** כמטריצה בינארית (מקבלת ערכים מ־$\{0,1\}$) עם $n$ שורות ו $m$ עמודות שבהן השורה הראשונה אינה זהה לאף שורה אחרת.

א. ($10$ נק') חשבו בעזרת הכלה והדחה כמה מטריצות־בראש־אחר קיימות. מותר להשאיר בתשובה סכום. הסבירו בקצרה.

**תשובה:** $\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}2^{m(n-k)}$

**הסבר:** נגדיר עבור $2\le j\le n$ את הקבוצה $A_j$ של המטריצות בהן שורות $1,j$ שוות, הגודל של חיתוך של $k$ קבוצות שונות הוא $2^m\cdot 2^{m(n-k-1)}=2^{m(n-k)}$.

ב. (10 נק') תנו ביטוי סגור (ללא סימן סכימה) למספר המטריצות־בראש־אחר. אין צורך בהסבר.

**תשובה:** $2^m(2^m-1)^{n-1}$

**הסבר מורחב:** נבחר את השורה הראשונה $2^m$ ואז לכל שורה אחרת יש $2^m-1$ אפשרויות. סה"כ:

$$2^m(2^m-1)^{n-1}$$

בדרך אחרת, אפשר לפשט את הביטוי מסעיף א בעזרת נוסחת הבינום:

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}2^{m(n-k)} = 2^m\cdot\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}(2^m)^{n-k-1} = 2^m(2^m-1)^{n-1}$$

**שאלה 3** (20 נקודות) בשאלה זו שני סעיפים לא קשורים זה לזה.

א. (10 נק') נתבונן בקבוצה:

$$A=\{\langle x_1,\ldots,x_{30}\rangle\in\mathbb{N}^{30}\ \mid\ \textstyle\sum_{i=1}^{30}x_i\le 50,\quad \forall i\in[30].\ x_i>0\}$$

כלומר, סדרות שלמים חיוביים באורך 30 שסכומן קטן־שווה מ־50.

מה עוצמתה/גודלה של $A$? אין צורך בהסבר.

**תשובה:** $S(31,20)$

**הסבר מורחב:** נשתמש באסטרטגיית החלפת משתנים $x_i=y_i+1$ והוספת תא זבל. כלומר, נתבונן בקבוצה:

$$B=\{\langle z,y_1,\ldots,y_{30}\rangle\in\mathbb{N}^{31}\ \mid\ z+\textstyle\sum_{i=1}^{30}y_i=20\}$$

היא שקולה ל־$A$ על ידי הזיווג $\langle z,y_1,\ldots,y_{30},\rangle\mapsto\langle y_1+1,\ldots,y_{30}+1\rangle$. לכן, התשובה היא: $S(31,20)$.

**ב.** (10 נק') נתבונן בקליקה מעל $[50]$ $V \subseteq$ כך ש־$|V| = 21$. הוכיחו שישנן שלוש קשתות שונות בקליקה שסכום קדקודיהן זהה.

**הוכחה:** נסתכל על הסכומים האפשריים של מספרים שבין 1 ל 50. הסכום המינימלי יהיה 3 והסכום המקסימלי יהיה 99. כלומר מספר הסכומים האפשריים הוא 97. כאשר בוחרים זוג מספרים מתוך 21, יש $\binom{21}{2} = 210$ אפשרויות. מעיקרון שובך היונים, כאשר הסכומים הם השובכים והקשתות הן היונים, יהיה שובך בו לפחות $\lceil \frac{210}{97} \rceil = 3$ יונים, כנדרש.

## **שאלה 4** ($20$ נקודות)

א. ($12$ נק') נסמן ב $a_n$ את כמות המספרים בעלי $n$ ספרות שניתן להרכיב מהספרות $1,2,3,4$ כך שהמכפלה של כל שתי ספרות סמוכות תהיה זוגית. מצאו נוסחת נסיגה לינארית הומוגנית מסדר לכל היותר שתיים ותנאי התחלה עבור $a_n$. הסבירו בקצרה.

**תנאי התחלה:** $a_1 = 4,\ a_2 = 12$.
לחילופין, נוח יותר להתחיל מ־ 0 (האלגברה בסעיף הבא פשוטה יותר):
$a_0 = 1,\ a_1 = 4$.
כדאי להשתכנע שערך זה לאיבר ה 0 מתאים לסדרה שנוסחת הנסיגה מגדירה.

**כלל נסיגה:** $a_n = 2a_{n-1} + 4a_{n-2}$

**הסבר:** אם נתחיל לבנות את המספר מהספרה 2 או מהספרה 4 אז נוכל להמשיך בכל סדרה תקינה באורך $n-1$. לכן אם נתחיל מ2 או מ 4 יהיו לנו $a_{n-1}$ אפשרויות. אם נתחיל ב3 או ב 1 אז נוכל הלמשיך לכל אחד מהם או ב 2 או ב 4. אחרי ששמנו 2 או 4 יש $a_{n-2}$ אפשרויות להשלים את הסדרה כלומר ל 1 או 3. יש $a_{n-2}$ אפשרויות כל אחד ולכן ביחד יש $a_{n-2}$. סה"כ הנוסחה היא $a_n = 2a_{n-1} + 4a_{n-2}$

ב. (8 נק') פיתרו את נוסחת הנסיגה שמצאתם בסעיף הקודם, כלומר הגיעו לביטוי סגור עבורה.

**נוסחה סגורה:** $a_n = (\frac{1}{2} + \frac{3}{2\sqrt{5}})(1+\sqrt{5})^n + (\frac{1}{2} - \frac{3}{2\sqrt{5}})(1-\sqrt{5})^n$

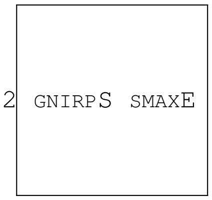
**הסבר:**
שיטת הפולינום האופייני.

**שאלה 5** (20 **נקודות)** עבור גרף $G=\langle V,E\rangle$ נסמן ב־$L(G)$ את הגרף שקדקודיו הם קשתותיו של $G$ וקשת מחברת קדקודים אם לקשתות שמהן הגיעו צומת משותפת ב־$G$. כלומר, $L(G)=\langle E,E'\rangle$ כאשר:

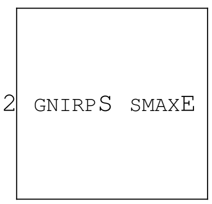
$$E'=\{\{e,f\}\subseteq E \mid \exists v\in V.\ e\cap f=\{v\}\}$$

א. (3 נק') נגדיר גרף $G_0=\langle\{1,2,3,a,b,x\},\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,a\},\{2,b\}\}\rangle$ **ציירו את** $G_0$, **ואת** $L(G_0)$. בציור יש לציין ליד כל קדקוד את זהותו.

:$G_0$




:$L(G_0)$




ב. (4 נק') מצאו גרף $G$ כך שמספר הצביעה שלו קטן ממש ממספר הצביעה של $L(G)$. הסבירו בקצרה.

**תזכורת:** מספר הצביעה של גרף הוא המספר המינימלי של צבעים שצריך כדי לצבוע את קדקודי הגרף כך שאף קשת לא תחבר בין קדקודים שנצבעו באותו הצבע.

$G =$ כוכב עם 3 קשתות

**הסבר:** את הכוכב ניתן לצבוע בשני צבעים, אך את המשולש $L(G)$ לא.

ג. ($4$ נק') מצאו גרף $G$ כך שב־$L(G)$ אין מעגל ויש צומת עם דרגה לפחות $2$. הסבירו בקצרה.

$G =$ השרוך $L_4$

**הסבר:** מתקיים ש־$L(L_4) = L_3$, כלומר יש בו צומת מדרגה $2$ ואין בו מעגל.

ד. ($9$ נק') הוכיחו שאין גרף $G$ כך שב־$L(G)$ אין מעגל ויש צומת עם דרגה לפחות $3$.

**הוכחה:** נראה שאם יש ב־$L(G)$ צומת מדרגה לפחות $3$, אז יש בו מעגל.

יהי $G = \langle V, E \rangle$ גרף כלשהו כך שבגרף $L(G) = \langle E, E' \rangle$ יש צומת $v_0$ מדרגה לפחות 3. $v_0 \in E$, לכן קיימים $a, b \in V$ שונים כך ש־$v_0 = \{a, b\}$. מההנחה על הדרגה, קיימים ל־$v_0$ (לפחות) 3 שכנים $v_1, v_2, v_3 \in E$ בגרף $L(G)$. מהגדרת $L(G)$, לכל $i \in [3]$ החיתוך $v_0 \cap v_i$ הוא סינגלטון, ומכיוון שהוא תת־קבוצה של $v_0 = \{a, b\}$ מתקיים $v_0 \cap v_i = \{a\}$ או $v_0 \cap v_i = \{b\}$. לכן ניתן להגדיר פונקציה $f\colon [3] \to \{\{a\}, \{b\}\}$ ע"י

$$f(i) = v_0 \cap v_i$$

מעיקרון שובך היונים $f$ לא חח"ע (התחום מעוצמה 3 והטווח הרשום מעוצמה 2), ז"א קיימים $i, j \in [3]$ שונים כך ש־$f(i) = f(j)$. בה"כ $f(i) = f(j) = \{a\}$. אז $a \in v_i \cap v_j$ ומכך ש־$v_i, v_j$ שונים נקבל $v_i \cap v_j = \{a\}$. לכן יש ב־$L(G)$ קשת בין $v_i$ ל־$v_j$, ובסה"כ יש בו מעגל (משולש) $v_0 - v_i - v_j - v_0$, כרצוי.

**שאלה 6** (5 נקודות בונוס לקבוצה 28) במשחק כדור־מים מתחרות 2 קבוצות שבכל אחת מהן 6 שחקני שדה ושוער אחד. במשחק כדורעף מתחרות 2 קבוצות שבכל אחת מהן 6 שחקנים. בכמה דרכים יכולים 26 חברים להרכיב 2 נבחרות כדור־מים ו־2 נבחרות כדורעף, כך שכל אדם ישחק בנבחרת אחת בדיוק? הקיפו בעיגול את התשובה הנכונה, אין צורך בהסבר.

I. $\frac{26!}{(6!)^4}$

II. $\frac{1}{2}\frac{26!}{(6!)^4}$

III. $\boxed{\frac{26!}{(6!)^4 \cdot 2^2}}$

IV. $\frac{1}{2}\frac{26!}{(6!)^4 \cdot 2^2}$

V. $\frac{26!}{(6!)^4 \cdot 4!}$

VI. $\frac{1}{2}\frac{26!}{(6!)^4 \cdot 4!}$

**הסבר מורחב:**

$$\frac{1}{2}\binom{26}{14}\binom{14}{2}\binom{12}{6}\binom{12}{6} = \frac{26!}{(6!)^4 \cdot 2^2}$$

(בחירת 14 שחקני כדור־מים, מתוכם בחירת 2 השוערים, בחירת הקבוצה של השוער הצעיר, הקבוצה השנייה נקבעת אוטומטית. לבסוף בחירת קבוצת הכדורעף הראשונה מבין 12 הנותרים, השנייה נקבעת אוטומטית ־ וחלוקה ב־2 כי סדר בחירת קבוצות הכדורעף לא חשוב.)

בדרך אחרת: נסדר בשורה את כל 62 השחקנים. הראשון יהיה השוער של נבחרת אחת של כדור־מים, ו־6 הבאים אחריו בשורה הם השחקנים שאיתו בנבחרת. אותו דבר לגבי 7 הבאים. 6 הבאים הם נבחרת אחת של כדור־עף וכך גם 6 האחרונים. נשים לב שכל אפשרות נספרת כך $(6!)^4 \cdot 2^2$ פעמים ־ כי הסדר הפנימי בכל שישייה לא חשוב, סדר הבחירה של 2 נבחרות הכדור־מים (השביעיות) לא משנה, וסדר הבחירה של 2 נבחרות הכדורעף לא משנה.

מסגרת נוספת למקרה הצורך: