

מתמטיקה בדידה 2 - מבחן מסכם מועד ב

תאריך: 19/4/2024

סגל הקורס: פרופסור גיל כהן, יואב גל-צור, איתי כהן.

- משך הבחינה: שלוש שעות.
- השימוש בחומר עזר או במחשבון אסור.
- את התשובות יש לרשום רק על טופס הבחינה. מתברת הבחינה משמשת כטייטה ולא תיבדק.
- יש לרשום מספר ת.ג. ומספר מחברת בראש כל אחד מהדפים בטופס.
- בטופס 9 עמודים, לא כולל עמוד זה, הכוללים 7 שאלות ו-2 עמודים עם מסגרת נוספת למקרה הצורך. שימו לב כי השאלה השביעית היא שאלת בונוס המיועדת לקבוצה 28 בלבד. ודאו שכלל העמודים ברשותכם.
- ערכה של כל אחת מ-6 השאלות, להוציא שאלת הבונוס, הוא 17 נקודות. ציון המבחן הסופי על כן יכול להגיע ל-102. ערכה של שאלת הבונוס הוא 5 נקודות, כך שסטודנטים מקבוצה 28 יכולים להגיע לציון של 107 נקודות. בכל מקרה, ציון המבחן הסופי יעוגל למטה, במקרה הצורך, ל-100.
- יש לרשום תשובה מנומקת עבור כל שאלה במסגרת המתאימה.
- יש לכתוב את כל התשובות במקום המוקצב ובכתב קריא. תשובות ובהן חריגות לא זניחות מהמקום המוקצב, או תשובות הכתובות בכתב קטן באופן קיצוני או לא ברור לא ייקראו ולא יקבלו ניקוד, או שיקבלו ניקוד חלקי בלבד. תשובות שדורשות מאמצים רבים להבנתן גם כן עלולות לגרום הורדת ציון.
- לכן, מומלץ בחום לפתור ראשית במחברת ואז לרשום פתרון מסודר במסגרת. כאמור, ישנן זוג מסגרות נוספות למקרה הצורך בסוף הטופס.
- ניתן לרשום "אינני יודע/ת" כתשובה לשאלה או סעיף שלה, פרט לשאלת הבונוס, ולקבל 20% מהניקוד. במקרה זה אין להוסיף שום הסבר ו/או לסמן את אחת האפשרויות.

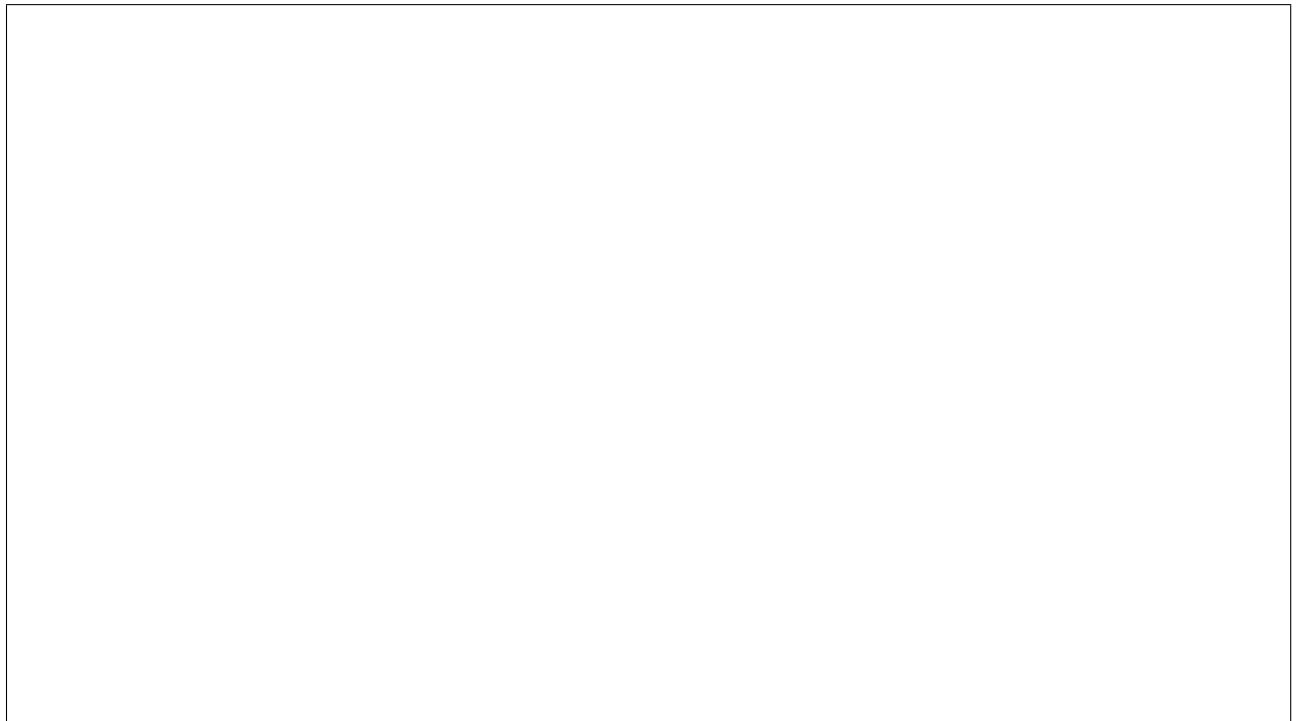
**בהצלחה!**

**שאלה 1 (17 נקודות)** צוות הקורס "מבוא להושבה" מונה 3 מרצים, 4 מתרגלים ו-7 בודקים. הצוות החליט לארגן ערב גיבוש במסעדת "ספור כפי יכולתך", עזרו לצוות למנות בכמה דרכים הם יכולים לשבת במסעדה תחת האילוצים השונים.

א. (5 נקודות) הצוות יישב סביב שולחן עגול, כל המרצים יישבו זה לצד זה, כל המתרגלים יישבו זה לצד זה וגם הבודקים יישבו זה לצד זה.



ב. (5 נקודות) הצוות צריך לשבת בשני שולחנות (זהים), כל אחד מהם מתאים ל-7 אנשים.



ג. (7 נקודות) הצוות החליט לקיים ערב גיבוש נוסף, אליו יוזמנו גם 280 התלמידים בקורס. בכמה דרכים ניתן להוסיב את כולם סביב שולחן עגול כך שבין כל זוג אנשי צוות מפרידים לפחות 10 סטודנטים?

**שאלה 2 (17 נקודות)** הוכיחו קומבינטורית את הזהויות הבאות:

א. (5 נקודות)

$$\binom{2k}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i}^2$$

ב. (12 נקודות)

$$\binom{n+1}{k+1} = \sum_{i=k}^n \binom{i}{k}$$

**שאלה 3 (17 נקודות)** יהי  $G$  גרף פשוט עם  $n \geq 2$  קודקודים. הוכיחו או הפריכו: קיימים ב- $G$  שני קודקודים שדרגתם זהה.



**שאלה 4 (17 נקודות)** בליגה האנגלית בכדור-ברך יש 20 קבוצות, מתוכן 10 קבוצות מגיעות מהעיר לונדון.  
א. (5 נקודות) בכל עונה כל זוג קבוצות משחק אחת נגד השנייה פעם אחת בלבד. מהו **אחוז המשחקים** בליגה האנגלית שלהם ניתן לקרוא "הדרבי של לונדון"? כלומר, שמשחקות בו שתי קבוצות מהעיר.

ב. (12 נקודות) בכל קבוצת כדור-ברך בליגה יש 6 שחקנים. בכמה דרכים ניתן לבחור 6 שחקנים שישתתפו במשחק הראווה של הליגה האנגלית מבלי שייבחרו יותר מ-2 שחקנים מאותה הקבוצה?

**שאלה 5 (17 נקודות)** כמה מחרוזות בינאריות מאורך  $n$  קיימות שאינן מכילות את תת המחרוזת 010? הביעו את תשובתכם בעזרת נוסחת נסיגה. אין צורך לחשב נוסחה סגורה לאיבר הכללי.

## שאלה 6 (71 נקודות) עבור מספר טבעי $n \geq 3$ , נגדיר:

1.  $X_n$ : קבוצת הגרפים הפשוטים שקבוצת הצמתים שלהם היא  $[n]$ .

2.  $S_n$ : גרף שקבוצת הצמתים שלו היא  $X_n$ , ובו שני צמתים מחוברים בקשת כאשר הגרפים המתאימים לצמתים אלו נבדלים בקשת אחת בדיוק (כלומר: גרף אחד מתקבל מהגרף השני על ידי הוספה או הסרה של קשת אחת).

באופן פורמלי, יש קשת בין שני צמתים  $G_1 = ([n], E_1)$  ו-  $G_2 = ([n], E_2)$  אם ורק אם  $|E_1 \Delta E_2| = 1$ .

א. (7 נקודות) הוכיחו / הפריכו: הגרף  $S_n$  דו-צדדי.

ב. (5 נקודות) נסמן את קבוצת הגרפים הלא קשירים על קבוצת הצמתים  $[n]$  ב-  $D_n$ . הוכיחו / הפריכו: הגרף המושרה מ-  $S_n$  על ידי קבוצת הצמתים  $D_n$  הוא קשיר.

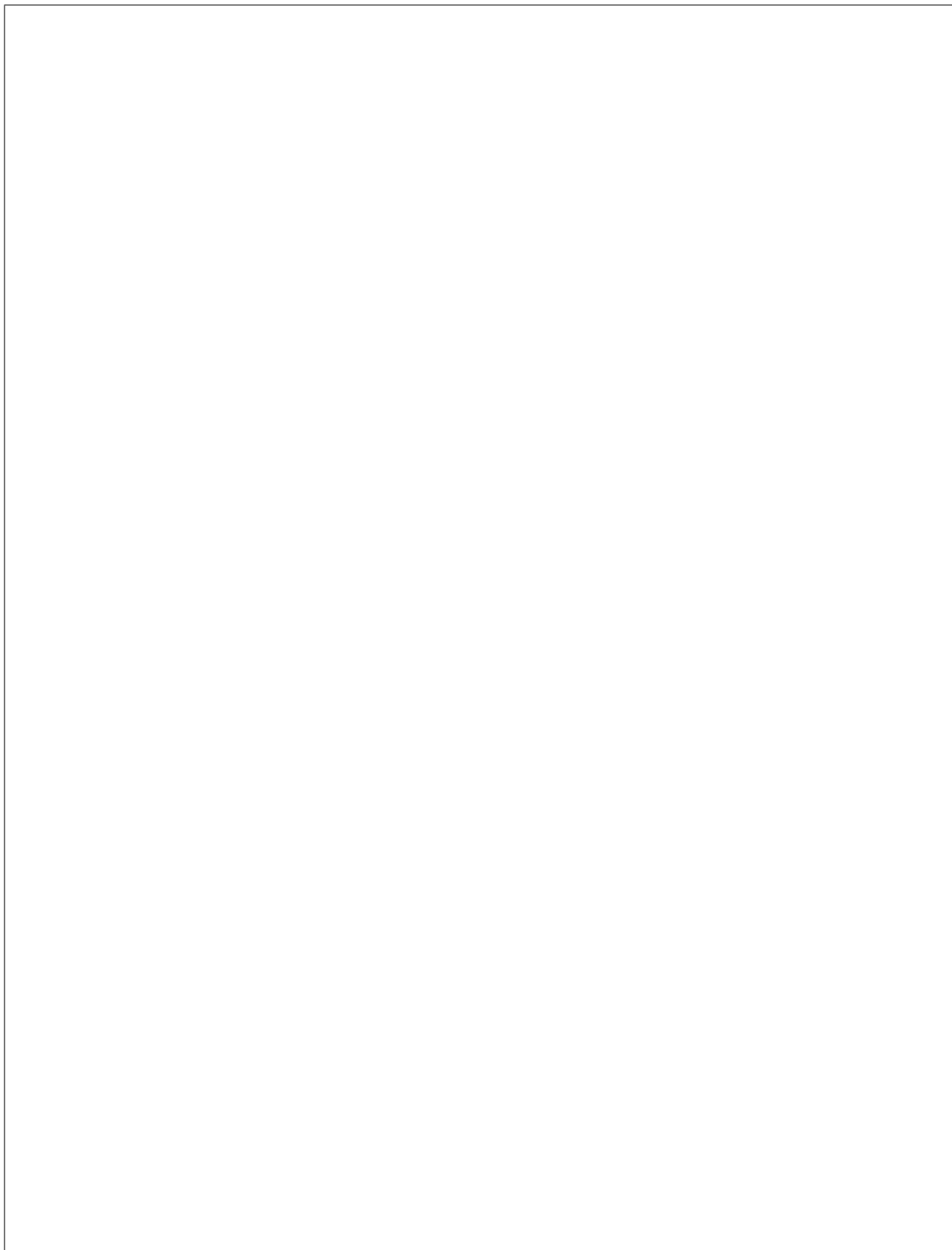


ג. (5 נקודות) נסמן את קבוצת העצים על קבוצת הצמתים  $[n]$  ב- $T_n$ . עבור אילו ערכים של  $n \geq 3$  הגרף המושרה מ- $S_n$  על ידי קבוצת הצמתים  $X_n \setminus T_n$  (כלומר, הגרף שקודקודיו אינם כוללים את  $T_n$ ) הוא קשיר? הסבירו.



**שאלה 7 (5 נקודות) שאלת בונוס לקבוצה 28.** כמה מספרים בעלי 4 ספרות ישנם כך שהספרות שלהם יוצרות סדרה יורדת ממש (לדוגמה: 8653 הוא כזה, 9553 איננו).

מסגרת נוספת למקרה הצורך:



מסגרת נוספת שניה למקרה הצורך:

