עיקרון שובך היונים

גיל כהן

עיקרון שובך היונים

אם שמים $n+1$ יונים ב-n שובכים אז יהיה שובך עם לפחות 2 יונים.

הוכחה

דה.

ניסוח יותר פורמלי

אם $f:[n+1]\longrightarrow[n]$ אז f לא חח"ע.

שאלה 1

הוכיחו כי בכל תת קבוצה של $\{0,1,2,\dots,9\}$ מגודל 6 , יש שני איברים שסכומם 9.

שאלה 1

הוכיחו כי בכל תת קבוצה של $\{0,1,2,\dots,9\}$ מגודל 6, יש שני איברים שסכומם 9.

פתרון

איברי הקבוצה

נסתכל על חמש הקבוצות הבאות

$$\{0,9\},\quad \{1,8\},\quad \{2,7\},\quad \{3,6\},\quad \{4,5\}$$

שובך 1   שובך 2   . . .   שובך 5

מעיקרון שובך היונים, כל תת קבוצה מגודל 6 מכילה את כל איברי אחת מהקבוצות הנ"ל.

שאלה 2

תהא $A \subseteq [2n]$, $|A| \geq n+1$. הוכיחו כי קיימים שני מספרים ב- A

כך שהאחד מתחלק (ללא שארית) באחר.

שאלה 2

תהא $A \subseteq [2n]$, $|A| \geq n+1$. הוכיחו כי קיימים שני מספרים ב- A כך שהאחד מתחלק (ללא שארית) באחר.

פתרון

נסמן את איברי A ב- $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+1}$, ונכתוב

$$x_i = 2^{k_i} \cdot b_i$$

כאשר $k_i \geq 0$ שלם ו- b_i אי-זוגי.

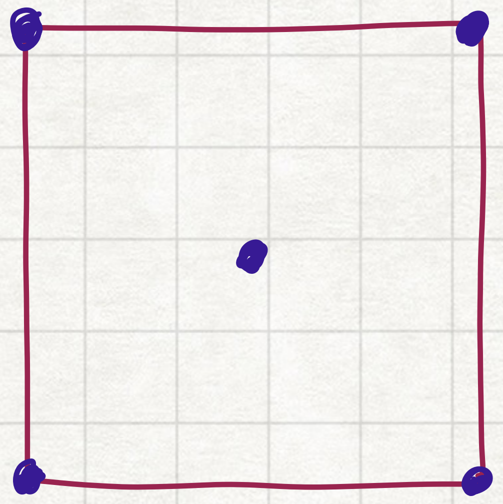
מכיוון שיש n מספרים אי-זוגיים ב- $[2n]$ ומכיוון ש- $b_1, \dots, b_{n+1} \in [2n]$

נקבל, מעיקרון שובך היונים כי $b_i = b_j$ עבור זוג כלשהו $i<j$.

$$\Leftarrow \quad x_i = 2^{k_i} b_i = 2^{k_i} b_j \mid 2^{k_j} b_j = x_j$$

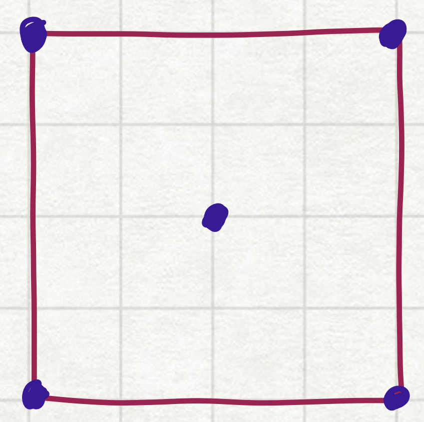
שאלה 3

בתוך ריבוע שאורכו בצלע 2 נתונות 5 נקודות שונות.
הוכיחו כי קיימות 2 נקודות שונות שהמרחק ביניהן
אינו עולה על $\sqrt{2}$.



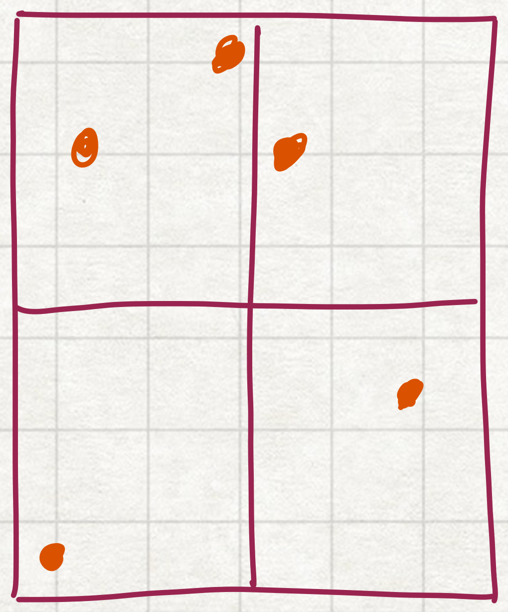
שאלה 3

בתוך ריבוע שאורך צלעו 2 נתונות 5 נקודות שונות. הוכיחו כי קיימות 2 נקודות שונות שהמרחק ביניהן אינו עולה על $\sqrt{2}$.



פתרון

נחלק את הריבוע כמו באיור. מעיקרון שובך היונים שתי נק' לפחות נמצאות באותו ריבוע 1×1 ולכן המרחק בין שתי נק' אלו $\leq \sqrt{2}$.



שאלה 4

הוכיחו כי קיים מספר טבעי שכל ספרותיו 7 שמתחלק ב-13.

פתרון לא מומלץ

להתחיל ולבדוק. ובכל מקרה, אם תעשו זאת תיווכחו דבק שהמספר

הראשון מהצורה הזו המתחלק ב-13 הוא $777,777 = 13 \cdot 59,829$

שאלה 4

הוכיחו כי קיים מספר בעל שכל ספרותיו 7 שמתחלק ב-13.

פתרון לא מומלץ אחר

ישנו מבחן לחלוקה ב-13: מספר מתחלק ב-13 אם"ם לאחר שמוסיפים למספר ללא ספרת האחדות שלו את ספרת האחדות מוכפלת ב-4, מקבלים מספר שמתחלק ב-13.

$777 \longrightarrow 77+7\cdot4=105 \longrightarrow 10+5\cdot4=30$

$7777 \longrightarrow 777+7\cdot4=805 \longrightarrow 80+5\cdot4=100 \longrightarrow 10+0\cdot4=10$

בשני הפתרונות הללו עשינו יותר מדי - ניסינו למצוא מספר כנדרש במקום להוכיח את קיומו.

שאלה 4

הוכיחו כי קיים מספר טבעי שכל ספרותיו 7 שמתחלק ב-13.

פתרון

נסתכל על 13 המספרים $\underbrace{77\cdots7}_{\text{13 ספרות}}$, ... , 777, 77, 7.

אם אחד מהם מתחלק ב-13 - סיימנו!

אחרת 13 המספרים לעיל משאירים שארית מבין $\{1, 2, \ldots, 12\}$ בחלוקה ל-13.

מעיקרון שובך היונים, שניים מתוכם משאירים את אותה השארית ולכן

הפרשם מתחלק ב-13.

$$13 \mid \underbrace{77\cdots7}_{a} - \underbrace{77\cdots7}_{b} = \underbrace{777\cdots7}_{a-b}\underbrace{00\cdots0}_{b}$$

שאלה 4

הוכיחו כי קיים מספר טבעי שכל ספרותיו 7 שמתחלק ב-13.

פתרון

$$13 \mid \underbrace{77\cdots7}_{a} - \underbrace{77\cdots7}_{b} = \underbrace{777\cdots7}_{a-b}\underbrace{00\cdots0}_{b}$$

מכיוון ש-13 ראשוני שאינו מחלק את 10^b מתקיים ש $13 \mid \underbrace{7\cdots7}_{a-b}$

ואכן, רגע של תורת המספרים

ראשוני $\longrightarrow p \mid ab \Longrightarrow p \mid a$ או $p \mid b$

שאלה 5

נתונה קבוצה A של עשרה מספרים דו-ספרתיים שונים.

הוכיחו כי קיימות ל-A שתי תתי-קבוצות זרות ולא ריקות שסכום איבריהן שווה.

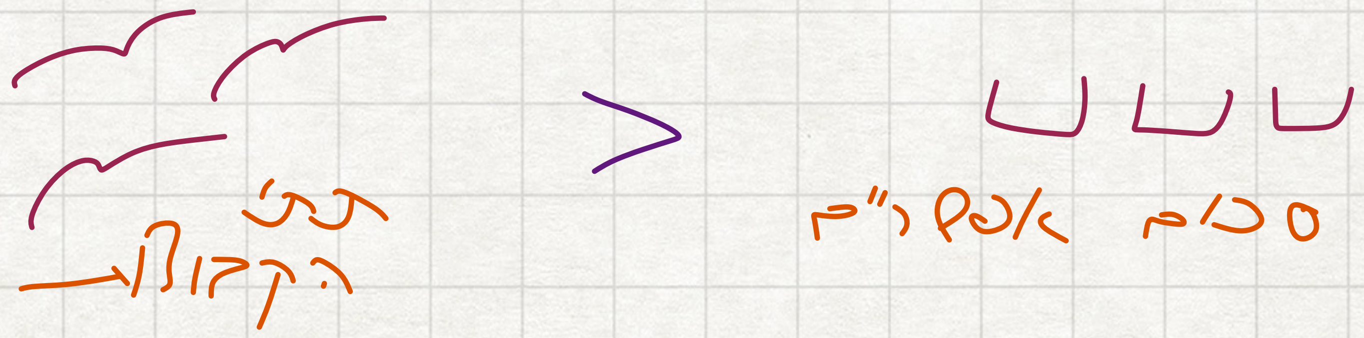
שאלה 5

נתונה קבוצה A של עשרה מספרים דו-ספרתיים שונים.
הוכיחו כי קיימות ל-A שתי תתי-קבוצות זרות ולא ריקות שסכום איבריהן שווה.

פתרון

ישנן $2^{10}-1 = 1023$ תתי קבוצות שונות שאינן ריקות ל-A.

מצד שני, סכום האיברים בכל תת-קבוצה שלה הוא בין 10 ל-$990 = 10\cdot 99$



$\Leftarrow$ מעיקרון שובך היונים יש שתי תתי קבוצות שונות של A שסכום איבריהן שווה.

סיימנו?

שאלה 5

נתונה קבוצה A של עשרה מספרים דו-ספרתיים שונים.

הוכיחו כי קיימות ל-A שתי תתי-קבוצות זרות ולא ריקות שסכום איבריהן שווה.

פתרון

ישנן $2^{10}-1=1023$ תתי קבוצות שונות שאינן ריקות ל-A.

מצד שני, סכום האיברים בכל תת-קבוצה שכזו הוא בין 10 ל-$10\cdot 99=990$

$\Leftarrow$ מעיקרון שובך היונים יש שתי תתי קבוצות שונות של A שסכום איבריהן שווה.

סיימנו? לא, שכן הקבוצות אינן זרות. מה נעשה?

שאלה 5

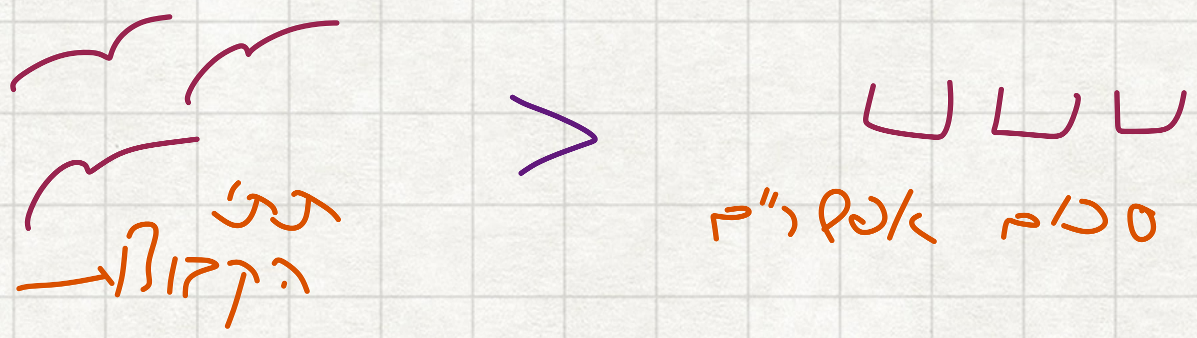
נתונה קבוצה A של עשרה מספרים דו-ספרתיים שונים.

הוכיחו כי קיימות ל-A שתי תתי-קבוצות זרות ולא ריקות שסכום איבריהן שווה.

פתרון

ישנן $2^{10}-1=1023$ תתי קבוצות שונות שאינן ריקות ל-A.

מצד שני, סכום האיברים בכל תת-קבוצה שכזו הוא בין 10 ל- $10\cdot 99=990$



$\Leftarrow$ מעיקרון שובך היונים יש שתי קבוצות שונות של A שסכום איבריהן שווה.

סיימנו? לא, שכן הקבוצות אינן זרות. מה נעשה? נכון! נזרוק את האיברים המשותפים. הסכומים עדיין יהיו שווים.

עיקרון שובך היונים המוכלל

אם m יונים נמצאות ב- n שובכים אזי יש שובך
המכיל לפחות $\lceil \frac{m}{n} \rceil$ יונים.

הוכחה

ממוצע היונים (*) בשובך הוא $\frac{m}{n}$. על כן קיים שובך עם לפחות $\frac{m}{n}$ יונים.
מכיוון שיונים הינם יצורים בדידים. קיים שובך עם לפחות $\lceil \frac{m}{n} \rceil$ יונים.

(*) אף יונה לא נפגעה לצורך הכנת שיעור זה.