אוניברסיטת תל אביב TEL AVIV UNIVERSITY

מתמטיקה בדידה 2 **חורף תשפ"ד**

מתמטיקה בדידה 2 – מבחן מסכם מועד ב

תאריך: 19/4/2024

סגל הקורס: פרופסור גיל כהן, יואב גל־צור, איתי כהן.

- משך הבחינה: שלוש שעות.
- השימוש בחומר עזר או במחשבון אסור.
- את התשובות יש לרשום רק על טופס הבחינה. מחברת הבחינה משמשת כטיוטה ולא תיבדק.
- יש לרשום מספר ת.ז. ומספר מחברת בראש כל אחד מהדפים בטופס.
- בטופס 9 עמודים, לא כולל עמוד זה, הכוללים 7 שאלות ו־2 עמודים עם מסגרת נוספת למקרה הצורך. שימו לב כי השאלה השביעית היא שאלת בונוס המיועדת לקבוצה 28 בלבד. ודאו שכלל העמודים ברשותכם.
- ערכה של כל אחת מ־6 השאלות, להוציא שאלת הבונוס, הוא 17 נקודות. ציון המבחן הסופי על כן יכול להגיע ל־102. ערכה של שאלת הבונוס הוא 5 נקודות, כך שסטודנטים מקבוצה 28 יכולים להגיע לציון של 107 נקודות. בכל מקרה, ציון המבחן הסופי יעוגל למטה, במקרה הצורך, ל־100.
- יש לרשום תשובה מנומקת עבור כל שאלה במסגרת המתאימה.
  - יש לכתוב את כל התשובות במקום המוקצב ובכתב קריא. תשובות ובהן חריגות לא זניחות מהמקום המוקצב, או תשובות הכתובות בכתב קטן באופן קיצוני או לא ברור לא ייקראו ולא יקבלו ניקוד, או שיקבלו ניקוד חלקי בלבד. תשובות שדורשות מאמצים רבים להבנתן גם כן עלולות לגרור הורדת ציון.
  - לכן, מומלץ בחום לפתור ראשית במחברת ואז לרשום פתרון מסודר במסגרת. כאמור, ישנן זוג מסגרות נוספות למקרה הצורך בסוף הטופס.
- ניתן לרשום "אינני יודע/ת" כתשובה לשאלה או סעיף שלה, פרט לשאלת הבונוס, ולקבל 20% מהניקוד. במקרה זה אין להוסיף שום הסבר ו/או לסמן את אחת האפשרויות.

בהצלחה!

שאלה 1 (17 נקודות) צוות הקורס "מבוא להושבה" מונה 3 מרצים, 4 מתרגלים ו־7 בודקים.
הצוות החליט לארגן ערב גיבוש במסעדת "ספור כפי יכולתך", עזרו לצוות למנות בכמה דרכים הם יכולים לשבת במסעדה תחת האילוצים השונים.

א. (5 נקודות) הצוות יישב סביב שולחן עגול, כל המרצים יישבו זה לצד זה, כל המתרגלים יישבו זה לצד זה וגם הבודקים יישבו זה לצד זה.

ראשית נסדר את שלוש הקבוצות סביב השולחן: ישנן $2!$ לעשות זאת.
לפי עקרון הכפל, נכפיל במספר הסידורים הפנימיים בתוך כל קבוצה ונקבל:

$$2!3!4!7!$$

ב. (5 נקודות) הצוות צריך לשבת בשני שולחנות (זהים), כל אחד מהם מתאים ל־7 אנשים.

אנחנו צריכים לחלק את הצוות לשתי קבוצות בנות שבעה אנשים, ישנן $\frac{1}{2}\cdot\binom{14}{7}$ דרכים לעשות זאת. שימו לב שעלינו לחלק ב־2 שכן בחירת שבעה אנשי צוות מסוימים שקולה לבחירת שבעה אנשי הצוות שאינם בקבוצה המקורית (שכן השולחנות זהים).
ישנן $6!$ דרכים להושיב כל קבוצה סביב השולחן. לפי עקרון הכפל נקבל:

$$\frac{1}{2}\cdot\binom{14}{7}6!6!$$

ג. (7 נקודות) הצוות החליט לקיים ערב גיבוש נוסף, אליו יוזמנו גם 280 התלמידים בקורס. בכמה דרכים ניתן להושיב את כולם סביב שולחן עגול כך שבין כל זוג אנשי צוות מפרידים לפחות 10 סטודנטים?

נתחיל בלהושיב את חברי הצוות, ישנן $13!$ דרכים לעשות זאת.
כעת אנחנו נמצאים בבעיית הכדורים והסלים: יש לנו 280 כדורים (סטודנטים) שאנחנו רוצים לחלק בין 14 תאים כל שבכל תא לפחות 10 כדורים. הבעיה שקולה לחלוקה של 140 כדורים ל־14 סלים ומספר הדרכים לחלק אותם הוא

$$\binom{14+140-1}{140} = \binom{153}{140}$$

מכיוון שהסטודנטים אינם זהים אחד לשני, כל סידור של אנשי צוות וסטודנטים כנ"ל נצטרך להכפיל במספר הדרכים לסדר את הסטודנטים, כלומר $280!$.
סך הכל נקבל

$$13! \cdot \binom{153}{140} \cdot 280!$$

שאלה 2 (17 נקודות) הוכיחו קומבינטורית את הזהויות הבאות:

א. (5 נקודות)

$$\binom{2k}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}^2$$

שני הצדדים מתארים את מספר הדרכים לחלק קבוצה של $2k$ איברים לשתי קבוצות באותו הגודל.
צד שמאל עושה זאת על ידי בחירת k איברים ללא חזרות ובלי חשיבות לסדר.
צד ימין עושה זאת כך: נחלק שרירותית את האיברים לשתי קבוצות זרות בגודל k. לכל $i \leq k$ נבחר i איברים מהקבוצה הראשונה ו־ $k-i$ איברים מהקבוצה השניה כדי ליצור קבוצה חדשה בת k איברים. מכיוון שמתקיים $\binom{k}{i} = \binom{k}{k-i}$, נקבל את צד ימין.

ב. (12 נקודות)

$$\binom{n+1}{k+1} = \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k}$$

צד שמאל הוא מספר הדרכים לבחור ועדה של $k+1$ אנשים מתוך קבוצה של $n+1$.
בשביל לתת פרשנות לצד ימין, נסדר את האנשים לפי גובהם. כל מחובר בצד ימין הוא בחירת ועדה כאשר האדם ה־ $i+1$ הוא האדם הכי גבוה בועדה.

שאלה 3 (17 נקודות) יהי G גרף פשוט עם $n \geq 2$ קודקודים. הוכיחו או הפריכו: קיימים ב־ G שני קודקודים שדרגתם זהה.

הטענה נכונה, נוכיח אותה בעזרת עקרון שובך היונים.
דרגתו של כל קודקוד היא מספר מהקבוצה $\{0,,\ldots,n-1\}$, אבל אם ישנו קודקוד מדרגה $n-1$ אזי לא קיים קודקוד מדרגה 0 ולהיפך. לכן, קבוצת הדרגות האפשריות היא מגודל $n-1$. היות וישנם n קודקודים נקבל מעיקרון שובך היונים כי קיים זוג קודקודים עם אותה הדרגה.

שאלה 4 (17 נקודות) בליגה האנגלית בכדור־ברך יש 20 קבוצות, מתוכן 10 קבוצות מגיעות מהעיר לונדון.

א. (5 נקודות) בכל עונה כל זוג קבוצות משחק אחת נגד השניה פעם אחת בלבד. מהו **אחוז המשחקים** בליגה האנגלית שלהם ניתן לקרוא "הדרבי של לונדון"? כלומר, שמשחקות בו שתי קבוצות מהעיר.

בכל דרבי של לונדון משחקות שתי קבוצות מלונדון! ולכן יש $\binom{10}{2}$ משחקי דרבי שונים. סך המשחקים השונים הוא $\binom{20}{2}$.
כאחוז מסך המשחקים זה יוצא:

$$\frac{\binom{10}{2}}{\binom{20}{2}} = \frac{10!}{2!8!} \cdot \frac{2!18!}{20!} = \frac{9 \cdot 10}{19 \cdot 20} = \frac{9}{38}$$

ב. (12 נקודות) בכל קבוצת כדור־ברך בליגה יש 6 שחקנים. בכמה דרכים ניתן לבחור 6 שחקנים שישתתפו במשחק הראווה של הליגה האנגלית מבלי שייבחרו יותר מ־ 2 שחקנים מאותה הקבוצה?

נשתמש בעיקרון ההכלה וההדחה. ישנם 120 שחקנים בליגה. לכן, מספר הנבחרות השונות, ללא מגבלות, הוא

$$\binom{120}{6}$$

נסמן ב־ A_i את מספר הנבחרות אשר מכילות שלושה שחקנים או יותר מהקבוצה ה־ i. מתקיים:

$$|A_i| = \sum_{j=3}^{6} \binom{6}{j}\binom{114}{6-j}$$

ולכל זוג קבוצות:

$$|A_i \cap A_j| = \binom{6}{3}\binom{6}{3}$$

נשים לב כי חיתוך של כל שלוש או יותר קבוצות כנ"ל הוא ריק.
מעיקרון ההכלה וההדחה נקבל:

$$\binom{120}{6} - 20 \cdot \sum_{j=3}^{6} \binom{6}{j}\binom{114}{6-j} + \binom{20}{2}\binom{6}{3}^2$$

שאלה 5 (17 נקודות) כמה מחרוזות בינאריות מאורך n קיימות שאינן מכילות את תת המחרוזת 010? הביעו את תשובתכם בעזרת נוסחת נסיגה. אין צורך לחשב נוסחה סגורה לאיבר הכללי.

נסמן בa_n את סדרת המספרים שסופרת את המחרוזות הנ"ל.
נסמן בb_n את כמות המחרוזות מאורך n שאינן מתחילות ב10 ושאינן מכילות את תת המחרוזת 010.
כל מחרוזת חוקית יכולה להתחיל ב1 ואחריו מחרוזת חוקית, או להתחיל ב0 ואחריו מחרוזת חוקית שאינה מתחילה ב10.

$$a_n = a_{n-1} + b_{n-1}$$

באשר לb_n, כל מחרוזת חוקית שאינה מתחילה ב10 יכולה להתחיל ב0 ואחריה מחרוזת חוקית שאינה מתחילה ב10, או להתחיל ב11 ואחריה מחרוזת כלשהי שלא מכילה את הרצף 010.

$$b_n = b_{n-1} + a_{n-2}$$

לכן,

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-1} &= b_{n-1} \\ b_n &= a_n - a_{n-1} + a_{n-2} \\ a_n &= a_{n-1} + a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3} \\ &= 2a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3} \end{aligned}$$

שאלה 6 (17 נקודות) עבור מספר טבעי $n \geq 3$, נגדיר:

1. X_n: קבוצת הגרפים הפשוטים שקבוצת הצמתים שלהם היא $[n]$.
2. S_n: גרף שקבוצת הצמתים שלו היא X_n, ובו שני צמתים מחוברים בקשת כאשר הגרפים המתאימים לצמתים אלו נבדלים בקשת אחת בדיוק (כלומר: גרף אחד מתקבל מהגרף השני על ידי הוספה או הסרה של קשת אחת).
באופן פורמלי, יש קשת בין שני צמתים $G_1 = ([n], E_1)$ ו־$G_2 = ([n], E_2)$ אם ורק אם $|E_1 \triangle E_2| = 1$.

א. (7 נקודות) הוכיחו / הפריכו: הגרף S_n דו־צדדי.

הגרף S_n הוא אכן גרף דו־צדדי.
כדי לראות זאת, נשתמש בטענה שראינו בכיתה: גרף הוא דו־צדדי אם ורק אם אין בו מעגלים מאורך אי־זוגי.
בגרף S_n לא יכול להיות מעגל אי־זוגי, שכן כל צעד במעגל מתכתב עם הסרה או הוספה של קשת. מכיוון שבמעגל אנחנו מתחילים ומסיימים באותו קודקוד (גרף) נצטרך להוסיף ולהסיר אותו מספר של קשתות.

ב. (5 נקודות) נסמן את קבוצת הגרפים הלא קשירים על קבוצת הצמתים $[n]$ ב־D_n. הוכיחו / הפריכו: הגרף המושרה מ־S_n על ידי קבוצת הצמתים D_n הוא קשיר.

הגרף D_n קשיר, כי יש מסלול בין כל קודקוד בגרף זה לקודקוד המתכתב עם הגרף הריק (הגרף ללא צלעות).

ג. (5 נקודות) נסמן את קבוצת העצים על קבוצת הצמתים $[n]$ ב־T_n.

עבור אילו ערכים של $n \geq 3$ הגרף המושרה מ־S_n על ידי קבוצת הצמתים $X_n \setminus T_n$ (כלומר, הגרף שקודקודיו אינם כוללים את T_n) הוא קשיר? הסבירו.

עבור $n = 3$ הגרף איננו קשיר, שכן לא ניתן להגיע מגרף בעל צלע אחת לגרף המלא -- כל הגרפים בעלי שתי צלעות הם עצים.
לכל $n > 3$, קיים גרף בעל $n-1$ צלעות שהוא לא עץ (כלומר, יש בו מעגל). מגרף זה נוכל להגיע לגרף המלא על ידי הוספת צלעות מבלי לעבור דרך עץ וגם לגרף הריק על ידי הסרת הצלעות. כלומר, קיים מסלול בין הגרף המלא לגרף הריק. נשים לב כי מכל גרף בעל n צלעות או יותר ניתן להגיע לגרף המלא מבלי לעבור דרך עץ ומכל גרף בעל $n-1$ צלעות או פחות ניתן להגיע לגרף הריק.
על כן, עבור $n > 3$ הגרף המושרה מ־S_n על ידי קבוצת הצמתים $X_n \setminus T_n$ הוא קשיר.

שאלה 7 (5 נקודות) שאלת בונוס לקבוצה 28. כמה מספרים בעלי 4 ספרות ישנם כך שהספרות שלהם יוצרות סדרה יורדת ממש (לדוגמה: 8653 הוא כזה, 9553 איננו).

עבור כל בחירה של 4 ספרות שונות ישנה רק דרך אחת לסדרם כך שיהוו סדרה יורדת ממש. על כן התשובה היא

$$\binom{10}{4}$$

שימו לב שאין מספרים המספקים את התנאי עם ספרות זהות וגם שהספרה 0 היא בחירה לגיטימית (שכן היא לעולם תופיע אחרונה).

מסגרת נוספת למקרה הצורך:

מסגרת נוספת שניה למקרה הצורך: