מתמטיקה בדידה 2 **אביב תשפ"ד**

מבחן ־ מועד א

תאריך: 14/08/2024

סגל הקורס: מיכל פלדמן, אמיר רובינשטיין, יותם דביר, יואב גל־צור, תומר מנקט, רז לוטן, איתי תשובה

- משך הבחינה: שלוש שעות.
- השימוש במחשבון אסור.
- השימוש בחומר עזר אסור פרט לדף $A4$ דו־צדדי או שני דפי $A4$ חד־צדדיים. לקבוצה 28 ואחרים הזכאים לדף מורחב מותר השימוש בשני דפי $A4$ דו־צדדיים או ארבעה דפי $A4$ חד־צדדיים.
- את התשובות יש לרשום רק על טופס הבחינה. מחברת הבחינה משמשת כטיוטה ולא תיבדק.
- יש לרשום מספר ת.ז. ומספר מחברת בראש כל אחד מהדפים בטופס.
- בטופס 8 עמודים, לא כולל עמוד זה, הכוללים 5 שאלות, ושאלת בונוס נוספת לקבוצה 28, ועמוד עם מסגרת נוספת למקרה הצורך.
- ערכן של כל 5 השאלות, להוציא שאלת הבונוס, מסתכם ל־100 נקודות. ערכה של שאלת הבונוס הוא 5 נקודות, כך שסטודנטים מקבוצה 28 יכולים להגיע לציון של 105 נקודות. בכל מקרה, ציון המבחן הסופי יעוגל למטה, במקרה הצורך, ל־100.
- יש לכתוב את כל התשובות במקום המוקצב ובכתב קריא. תשובות ובהן חריגות לא זניחות מהמקום המוקצב, או תשובות הכתובות בכתב קטן באופן קיצוני או לא ברור לא ייקראו ולא יקבלו ניקוד, או שיקבלו ניקוד חלקי בלבד. תשובות שדורשות מאמצים רבים להבנתן גם כן עלולות לגרור הורדת ציון.
- לכן, מומלץ בחום לפתור ראשית במחברת ואז לרשום פתרון מסודר במסגרת.
- ניתן לרשום "אינני יודע/ת" כתשובה לשאלה או סעיף שלה, פרט לשאלת הבונוס, ולקבל 20% מהניקוד. במקרה זה אין להוסיף שום הסבר ו/או לסמן את אחת האפשרויות.
- בתשובות מותר להשאיר סימונים שנלמדו עבור ספירות בסיסיות (עצרת, מקדם בינומי), מספרי פיבונאצ'י, מספרי קטלאן, מספרי בל, מספרי סטרלינג מהסוג השני, דוור שיכור, וסימונים נוספים שראינו בהרצאה.

בהצלחה!

שאלה 1 (20 נקודות) נתבונן בסדרות מהצורה $x_1, \ldots, x_{3n}$ שבהן יש n פעמים 0, n פעמים 1 ו־ n פעמים -1.

א. (6 נק') מה גודל קבוצת כל הסדרות הללו? הסבירו בקצרה.

תשובה:

הסבר:

ב. (7 נק') כמה סדרות כאלו יש כך ש־$\sum_{k=1}^{m} x_k \geq 0$ לכל $m \in [3n]$. הסבירו בקצרה.

תשובה:

הסבר:

ג. (7 נק') כמה סדרות כאלו יש כך ש־$x_{3m+1} + x_{3m+2} + x_{3m+3} = 0$ לכל $m \in \{0, \ldots, n-1\}$? הסבירו בקצרה.

תשובה:

הסבר:

שאלה 2 (20 נקודות) נגדיר **מטריצה־בראש־אחר** כמטריצה בינארית (מקבלת ערכים מ־$\{0,1\}$) עם n שורות ו m עמודות שבהן השורה הראשונה אינה זהה לאף שורה אחרת.

א. (10 נק') חשבו בעזרת הכלה והדחה כמה מטריצות־בראש־אחר קיימות. מותר להשאיר בתשובה סכום. הסבירו בקצרה.

תשובה:

הסבר:

ב. (10 נק') תנו ביטוי סגור (ללא סימן סכימה) למספר המטריצות־בראש־אחר. אין צורך בהסבר.

תשובה:

שאלה 3 (20 נקודות) בשאלה זו שני סעיפים לא קשורים זה לזה.

א. (10 נק') נתבונן בקבוצה:

$$A = \{\langle x_1, \ldots, x_{30}\rangle \in \mathbb{N}^{30} \ \mid\ \sum_{i=1}^{30} x_i \leq 50, \quad \forall i \in [30].\ x_i > 0\}$$

כלומר, סדרות שלמים חיוביים באורך 30 שסכומן קטן־שווה מ־50.
מה עוצמתה/גודלה של A? אין צורך בהסבר.

תשובה:

ב. (10 נק') נתבונן בקליקה מעל $V \subseteq [50]$ כך ש־$|V| = 21$. הוכיחו שישנן שלוש קשתות שונות בקליקה שסכום קדקודיהן זהה.

הוכחה:

שאלה 4 (20 נקודות)

א. (12 נק') נסמן ב a_n את כמות המספרים בעלי n ספרות שניתן להרכיב מהספרות $1,2,3,4$ כך שהמכפלה של כל שתי ספרות סמוכות תהיה זוגית. מצאו נוסחת נסיגה לינארית הומוגנית מסדר לכל היותר שתיים ותנאי התחלה עבור a_n. הסבירו בקצרה.

תנאי התחלה:

כלל נסיגה:

הסבר:

ב. (8 נק') פיתרו את נוסחת הנסיגה שמצאתם בסעיף הקודם, כלומר הגיעו לביטוי סגור עבורה.

נוסחה סגורה:

הסבר:

שאלה 5 (20 נקודות) עבור גרף $G = \langle V, E \rangle$ נסמן ב־$L(G)$ את הגרף שקדקודיו הם קשתותיו של G וקשת מחברת קדקודים אם לקשתות שמהן הגיעו צומת משותפת ב־G. כלומר, $L(G) = \langle E, E' \rangle$ כאשר:

$$E' = \{\{e, f\} \subseteq E \mid \exists v \in V.\ e \cap f = \{v\}\}$$

א. (3 נק') נגדיר גרף $G_0 = \langle \{1, 2, 3, a, b, x\}, \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, a\}, \{2, b\}\} \rangle$ ציירו את G_0, ואת $L(G_0)$. בציור יש לציין ליד כל קדקוד את זהותו.

:G_0

:$L(G_0)$

ב. (4 נק') מצאו גרף G כך שמספר הצביעה שלו קטן ממש ממספר הצביעה של $L(G)$. הסבירו בקצרה.

תזכורת: מספר הצביעה של גרף הוא המספר המינימלי של צבעים שצריך כדי לצבוע את קדקודי הגרף כך שאף קשת לא תחבר בין קדקודים שנצבעו באותו הצבע.

$G =$

הסבר:

ג. (4 נק') מצאו גרף G כך ש־$L(G)$ אין מעגל ויש צומת עם דרגה לפחות 2. הסבירו בקצרה.

$G =$

הסבר:

ד. (9 נק') הוכיחו שאין גרף G כך ש־$L(G)$ אין מעגל ויש צומת עם דרגה לפחות 3.

הוכחה:

שאלה 6 (5 נקודות בונוס לקבוצה 28) במשחק כדור־מים מתחרות 2 קבוצות שבכל אחת מהן 6 שחקני שדה ושוער אחד. במשחק כדורעף מתחרות 2 קבוצות שבכל אחת מהן 6 שחקנים. בכמה דרכים יכולים 26 חברים להרכיב 2 נבחרות כדור־מים ו־2 נבחרות כדורעף, כך שכל אדם ישחק בנבחרת אחת בדיוק? הקיפו בעיגול את התשובה הנכונה, אין צורך בהסבר.

I. $\frac{26!}{(6!)^4}$

II. $\frac{1}{2}\frac{26!}{(6!)^4}$

III. $\frac{26!}{(6!)^4 \cdot 2^2}$

IV. $\frac{1}{2}\frac{26!}{(6!)^4 \cdot 2^2}$

V. $\frac{26!}{(6!)^4 \cdot 4!}$

VI. $\frac{1}{2}\frac{26!}{(6!)^4 \cdot 4!}$

מסגרת נוספת למקרה הצורך: