נוסחת קיילי ומשפט קירכהוף לספירת עצים פורשים

גיל כהן

הגדרה. עץ פורש של גרף קשיר G הוא תת-גרף קשיר של G המכיל את כל צמתי G ושאין בו מעגלים.

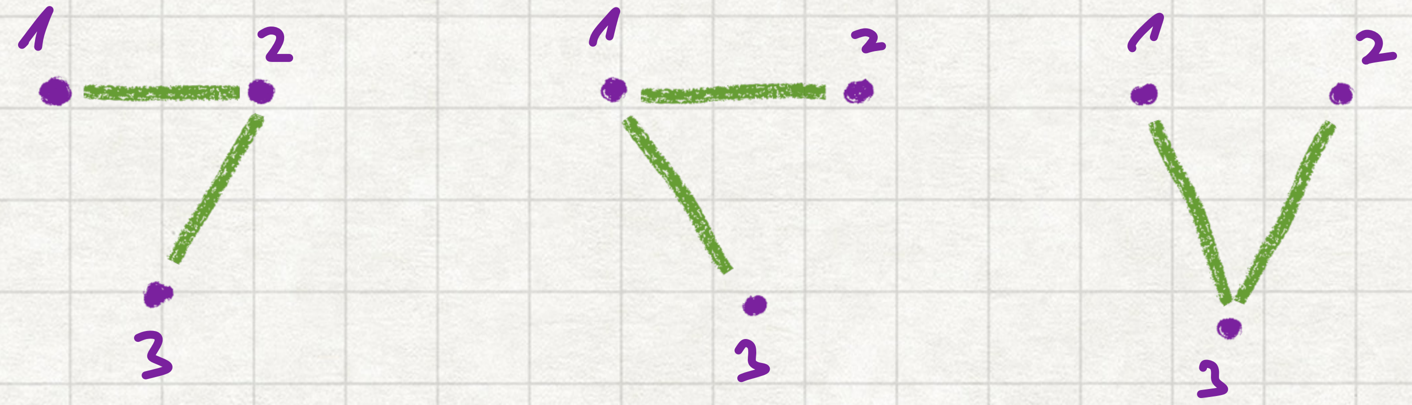
שאלה. כמה עצים פורשים יש לגרף המלא על n צמתים (שונים)?

נסמן מספר זה ב- T_n.

דוגמאות

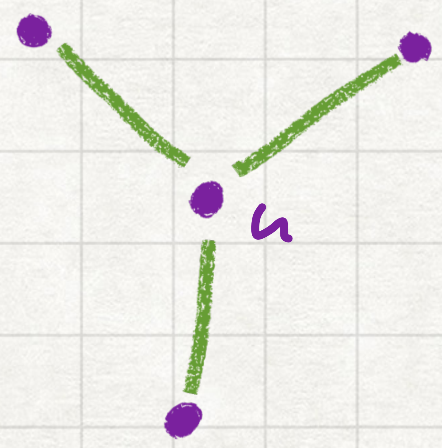
$T_1 = 1$

$T_2 = 1$



$T_3 = 3$

עבור $n=4$ יש 16 אפשרויות. אכן, אם נתעלם משמות הצמתים, נוכל להפריד למקרים לפי האם יש צומת עם דרגה 3 או לא. במקרה ולא, נראה כי העץ הפורש הוא P_4 שרוך. מהתבנית הראשונה יש 4 אפשרויות - בחירת אותו צומת עם דרגה 3 ומהתבנית השנייה יש $\frac{1}{2} \cdot 4! = 12$ אפשרויות - בחירת תמורה הקובעת את סדר שמות הצמתים בשרוך. למה מחלקים ב-2?



4 אפשרויות

לבחירת u

$\frac{1}{2} \cdot 4!$

$\Leftarrow \quad T_4 = 16$

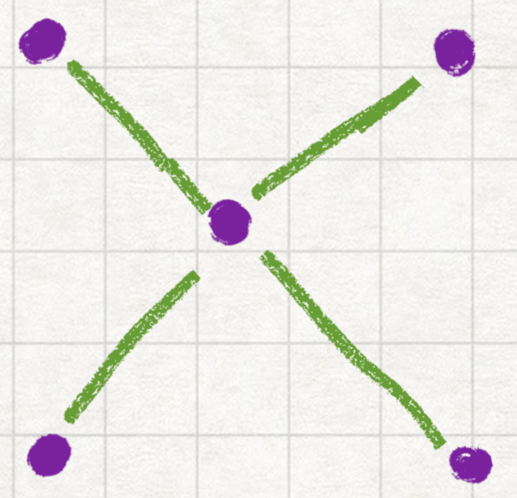
אבל כבר ב- $n=5$ העניינים מסתבכים:

דרגה מקסימלית
היא 2

$\frac{1}{2}\cdot 5! = 60$

בדומה למקרה $n=4$

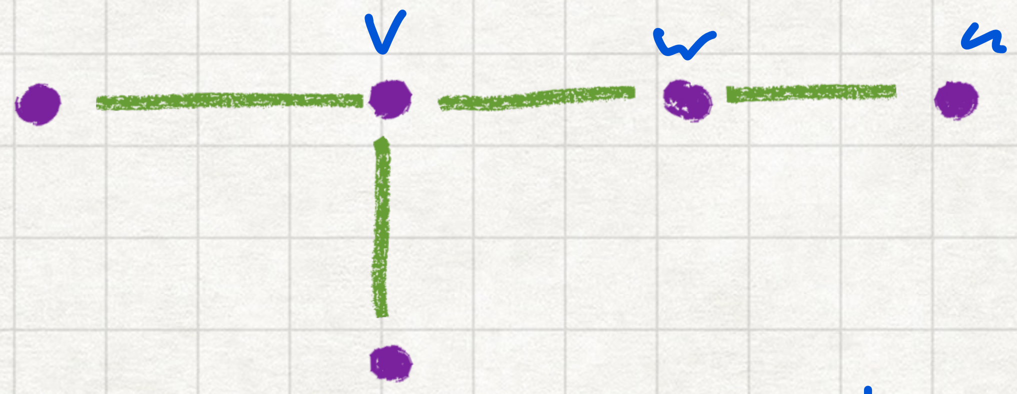
דרגה מקס' = 4



5

מספר האפשרויות לבחירת "המרכז"

יש קודקוד אחד עם
דרגה מקס' = 3



$5\cdot 4\cdot 3$

בחירת קודקוד v עם דרגה 3

בחירת השכן של v: u

בחירת w - השכן המשותף 4 ל- v,u

לא "תפסנו" 2 צמתים עם דרגה 3 שכן אז סכום הדרגות

$$8 = 2|E| = d_1+d_2+d_3+d_4+d_5 \geq 3+3+d_3+d_4+d_5$$

מספר הצלעות בעץ עם 5 צמתים הוא 4

אבל אז $d_3+d_4+d_5 \leq 2 \Leftarrow$ אחד מהם $d_i=0$.

סתירה לקשירות

$T_5 = 125$

$T_1 = 1$

$T_2 = 1$

$T_3 = 3$

$T_4 = 16$

$T_5 = 125$

מה למרין ?

משפט Cayley (1889) (אגב הוכח כבר ב 1860 ע"י Carl W. Borchardt ועוד קודם ע"י
James J. Sylvester (1857))

$$\boxed{T_n = n^{n-2}}$$

אנו נציג שלוש הוכחות למשפט. בספר הנפלא Proofs From The Book מאת Aigner - Ziegler
עלו מהספר הרצאה ב (ראו פרק 26) יש הוכחה רביעית.

הוכחה א'

צ"ל

ע״פ דוגמה

הוכחה א' - צ״ל

שייתכן ושווה לראשון

נתאר זיווג בין ע״פ כך שכל צמתים בעל "מסומנים" - אחד בכחול והשני באדום לבין קבוצת הפונקציות $[n]\to[n]$.

צ״ל שפונ׳ ברור כי

בחירת ← צומת ← כחול

וצומת ← אדום

$|[n]\to[n]|$

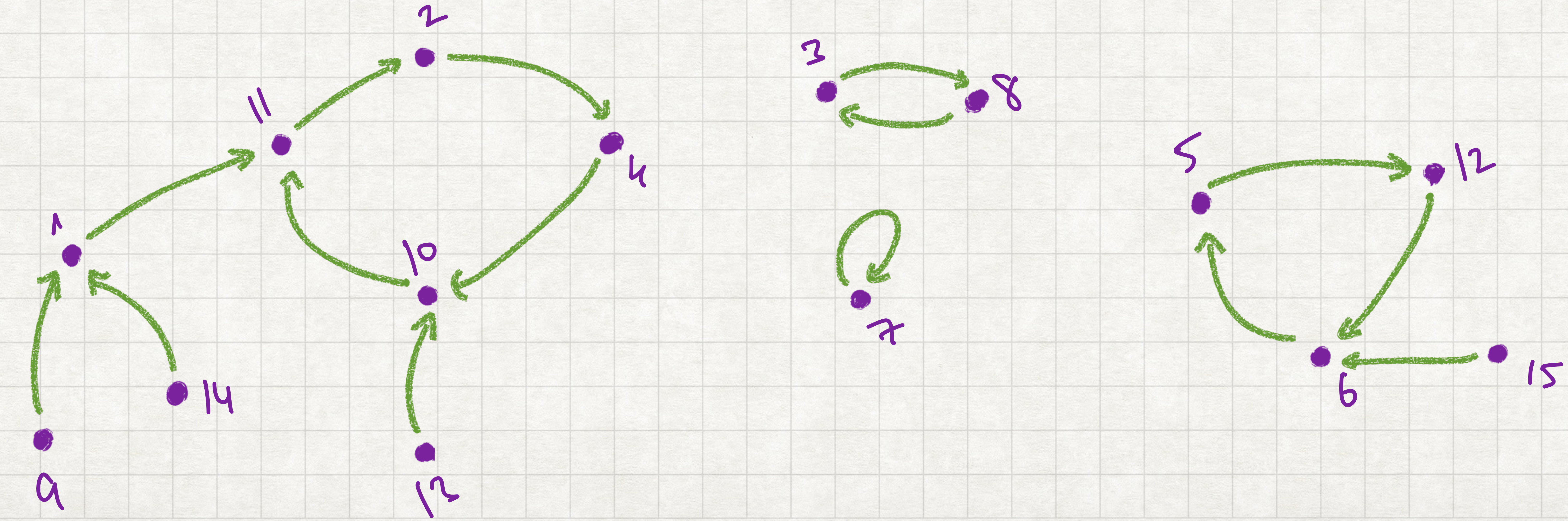
$$n^2 \cdot T_n = n^n \implies T_n = n^{n-2}$$

נתבונן לדוגמה בפונקציה

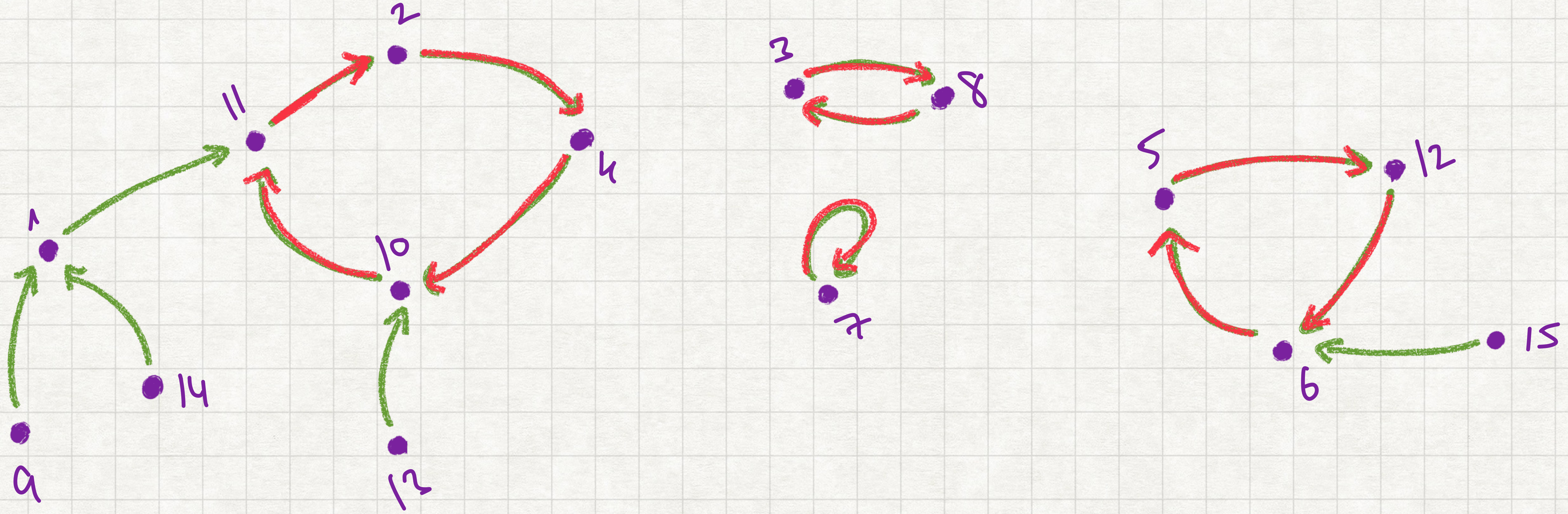
k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15 ← $(n=15)$
$f(k)$	11	4	8	10	12	5	7	3	1	11	2	6	10	1	6

ניתן לתאר את הפונקציה ע״י גרף **מכוון**: $G=([n],E)$ כך ש-

$$E=\{(k,f(k)) : k\in[n]\}$$



נסתכל על המעגלים די "הבנדיות"

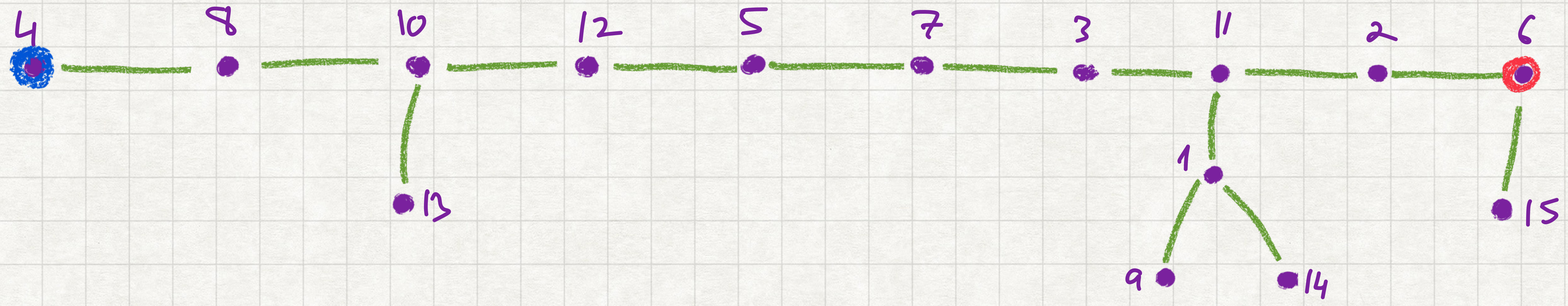


נסמן את הצמתים המשתתפים במעגלים ב- C ונצמצם את f ל- C:

k	...	2	3	4	5	6	7	8	...	10	11	12
$f(k)$		4	8	10	12	5	7	3		11	2	6

k	...	2	3	4	5	6	7	8	...	10	11	12
$f(k)$		4	8	10	12	5	7	3		11	2	6

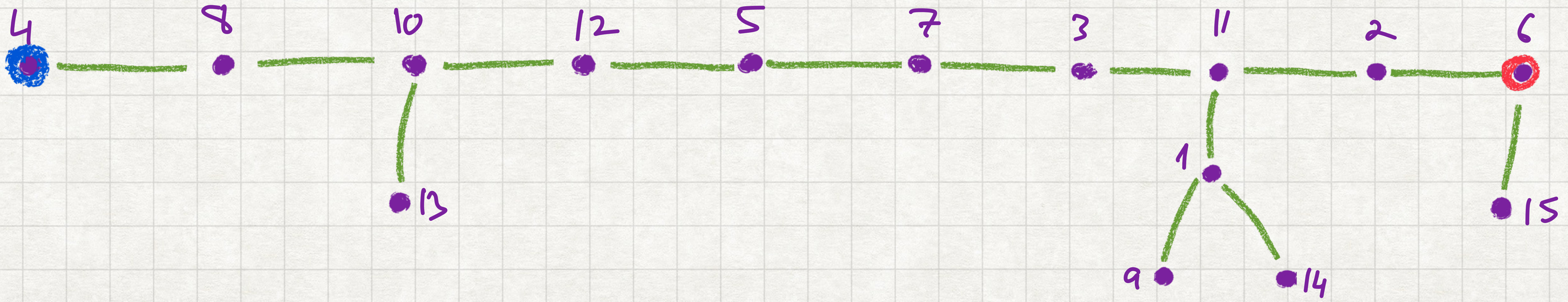
נבנה את העץ עם צמתים כחול ואדום לפי השורה התחתונה ממש לפי $f|_C$ כאשר
הצומת "הראשון" (זה שמתאים ל-k המינימלי "שנשאר" יהיה כחול והאחרון אדום.
ואת שאר הצמתים (הענפים) נעתיק לפי הגרף המכוון אך ללא הכיוונים:



לסיכום

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$f(k)$	11	4	8	10	12	5	7	3	1	11	2	6	10	1	6

$$\Downarrow \varphi$$



בכדי לחשב את φ^{-1} נבחין כי הצמתים של המסלול הקצר ביותר מהצומת הכחול לאדום יושבים על מעגל, ובעצם $\varphi|_C$ זה הצמצום המקסימלי של φ המשרה זיווג. לכן

$$\varphi|_C^{-1}(4) = 2$$

הצומת הכחול

המספר הקטן ביותר ב-C

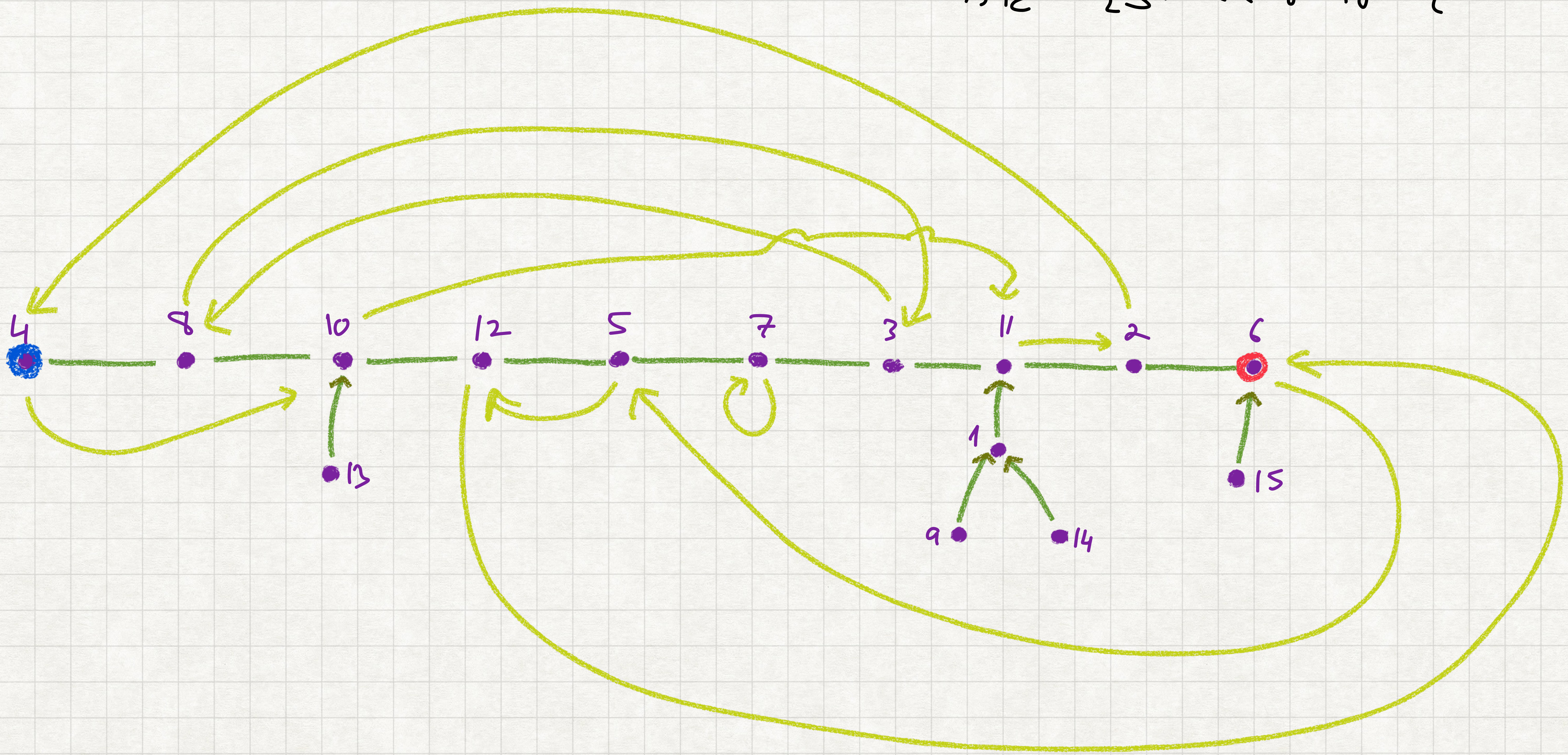
$$\varphi|_C^{-1}(8) = 3$$

השכן הסמוך של הצומת הכחול

המספר השני הכי קטן ב-C

$$\vdots$$

ממשיכים כך עד לחישוב הבצ״ש אלף:



ואז משלימים את החישוב תוך שימוש בזנבות שאין לכל דבר ועניין בעצם מכוונים! (שכן הצומת על המסלול (כמו למשל 11) אליו הזנבות מחוברים "משרה כיווניות").

הוכחה ב'

נוסחת נסיגה

בהוכחה השנייה נפתור בעיה כללית יותר (אפילו אם כל מה שמעניין אותנו הוא פתרון הבעיה המקורית. ואכן,
כמו באינדוקציה, ~~ב~~ בנוסחאות נסיגה צריך לפעמים "לחזק" את הנחת האינדוקציה / לפתור בעיה כללית יותר).

עבור $k \in [n]$ נסמן ב- $T_{n,k}$ את מספר היערות הפורשים בעלי k רכיבי קשירות בדיוק
בהם כל אחד מהצמתים $1,\dots,k$ מופיע ברכיב קשיר משלו.

תת גרף של G המכיל את
כל צמתי G ואין בו מעגלים

נבחין כי $T_{n,1} = T_n$.
וכי $T_{n,n} = 1$

אך הבעיה נעשית
קלה יותר כאשר n
וכן $k-1$ גדל

טענה

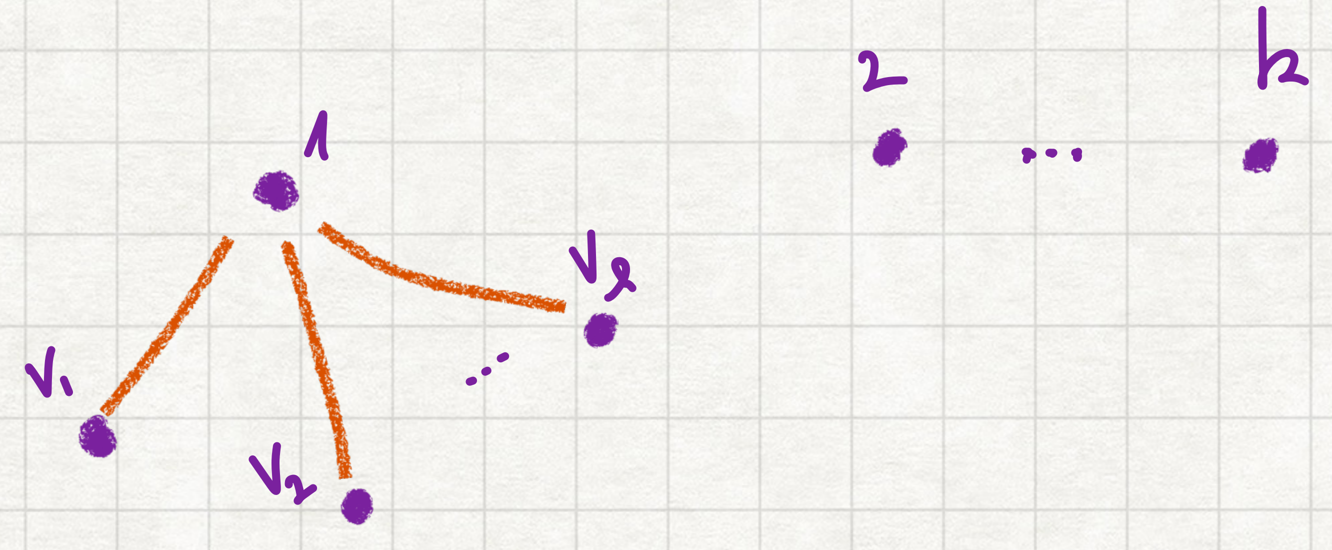
$$T_{n,k} = k \cdot n^{n-k-1}$$

אנו נעקוב אחרי ההוכחה של Riordan-Rényi אם כי הבעיה הופיעה כבר במאמר המקורי של Cayley

הוכחה.

נבחין כי אם לצומת 1 יש ℓ שכנים אז הסרתו תשאיר יער עם $k-1$ צמתים ו- $k-1+\ell$ רכיבים.

לכן



$$\forall n\geq k\geq 1 \qquad T_{n,k}=\sum_{\ell=0}^{n-k}\binom{n-k}{\ell}T_{n-1,\,k-1+\ell}$$

בנוסף.

$$\forall n>0 \qquad T_{n,0}=0$$

$$T_{0,0}\triangleq 1$$

(אחרת לא נהיה עקביים עם $T_{1,1}=1$

$T_{1,1}=\sum_{\ell=0}^{1-1}\binom{1-1}{\ell}T_{1-1,\,1-1+\ell}=T_{0,0}$)

כל שנותר כעת הוא להוכיח את המשפט באינדוקציה תוך שימוש בנוסחת הנסיגה.

באינדוקציה על n לכל $n\geq k\geq 0$.

$$T_{n,k} = \sum_{\ell=0}^{n-k} \binom{n-k}{\ell} \overbrace{(k-1+\ell)(n-1)^{n-1-k-\ell}}^{T_{n-1,k-1+\ell}}$$

$$j \triangleq n-k-\ell \longrightarrow \quad = \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} (n-1-j)(n-1)^{j-1}$$

$$= \underbrace{\sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} (n-1)^{j}}_{\text{מהבינום} \quad n^{n-k}} - \sum_{j=1}^{n-k} \underbrace{\binom{n-k}{j} j}_{} (n-1)^{j-1}$$

$$\frac{(n-k)!}{j!\,(n-k-j)!} \cdot j = \underbrace{\frac{(n-k-1)!}{(j-1)!\,(n-k-j)!}}_{\binom{n-k-1}{j-1}} \cdot (n-k)$$

$$= n^{n-k} - (n-k) \sum_{j=1}^{n-k} \binom{n-1-k}{j-1} (n-1)^{j-1}$$

$$= n^{n-k} - (n-k) \underbrace{\sum_{j=0}^{n-k-1} \binom{n-1-k}{j} (n-1)^{j}}_{\text{שוב מהבינום} \quad n^{n-k-1}} = n^{n-k} - (n-k)\, n^{n-1-k}$$

$$= k\, n^{n-1-k} \qquad \blacksquare$$

הוכחה ג׳

אלגברה לינארית

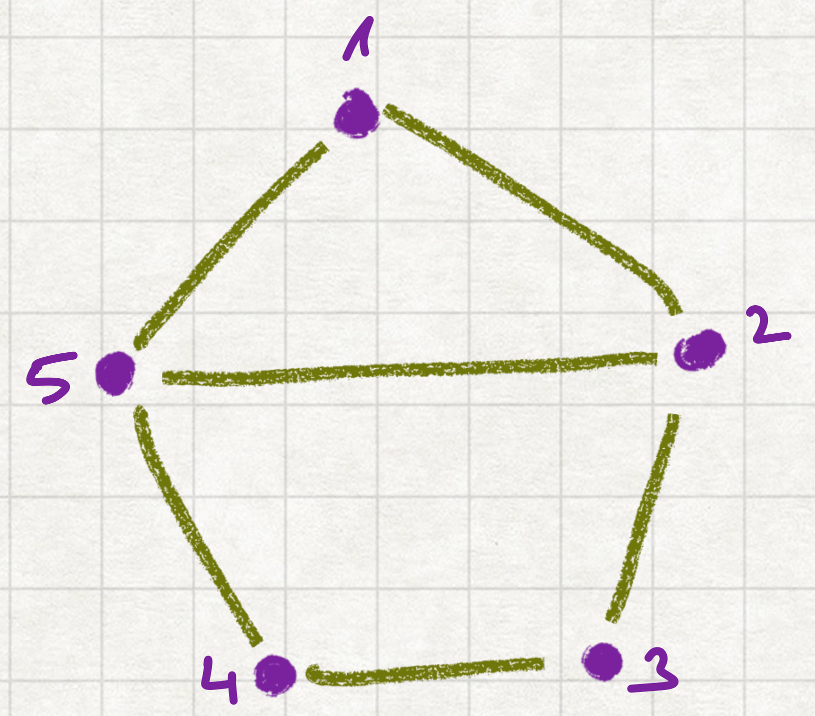
T_n כזכור הוא מספר העצים הפורשים של K_n. ההוכחה השלישית שנראה פותרת למעשה בעיה הרבה יותר כללית: בהינתן גרף קשיר ולא מכוון G נסמן ב- $T(G)$ את מספר העצים הפורשים של G. בהוכחה זו נראה דרך לתאר את $T(G)$ לכל G קשיר ובמקרה פרטי נסיק את $T(K_n) = T_n$.

ההוכחה מתבססת על כלים מאלגברה לינארית. יפתיע אתכם אולי שאלגברה לינארית היא כלי מאוד חזק בתורת הגרפים! ההוכחה הבאה היא דוגמה לכך.

בהינתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$ נגדיר מטריצה $|V|\times|E|$ שתסומן ב- B באופן הבא לכל $v\in V,\ e\in E$

$$B_{v,e}=\begin{cases}1 & v\in e\\ 0 & v\notin e\end{cases}$$

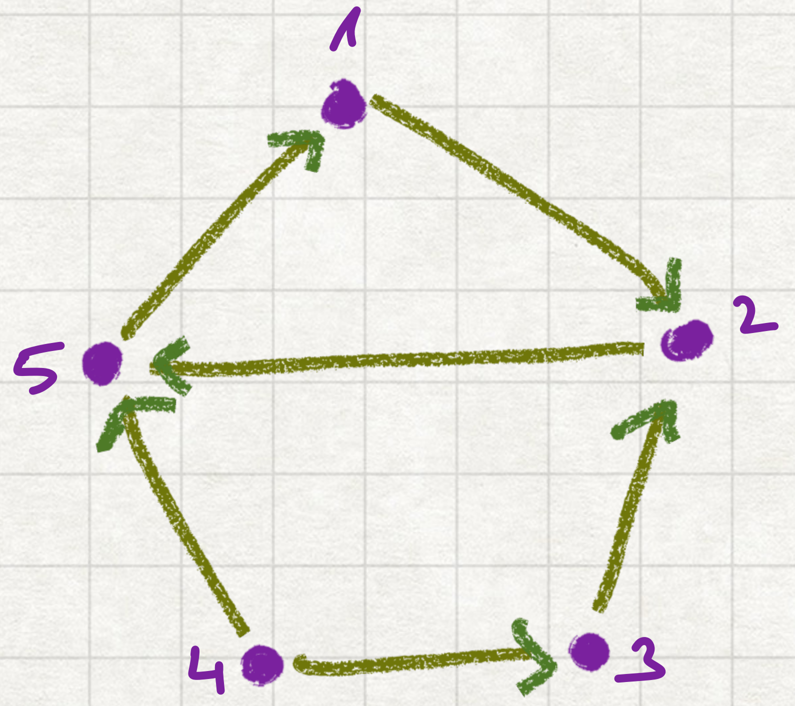
דוגמה



$$B=\begin{array}{c} \\ 1\\ 2\\ 3\\ 4\\ 5\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc}\{1,2\} & \{2,3\} & \{3,4\} & \{4,5\} & \{5,1\} & \{2,5\}\end{array}\\ \begin{pmatrix}1&0&0&0&1&0\\1&1&0&0&0&1\\0&1&1&0&0&0\\0&0&1&1&0&0\\0&0&0&1&1&1\end{pmatrix}\end{array}$$

ממטריצה B נגדיר מטריצה C כך: בכל עמודה נחליף באופן שרירותי את אחד ה-1-ים ל- -1.

$$C = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \{1,2\} & \{2,3\} & \{3,4\} & \{4,5\} & \{5,1\} & \{2,5\} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$



לא שזה ישנה לנו משהו אבל המשמעות הקומבינטורית פה
מהלך זה היא מתן כיוון לכל קשת באופן שרירותי מה-(+1)
ל- (-1).

נגדיר את המטריצה $M = CC^T$. נבחין כי זו מטריצה $|V| \times |V|$ סימטרית שהרי

$$M^T = (CC^T)^T = (C^T)^T C^T = CC^T = M$$

דרגת v

וכי הכניסה המתאימה לצומת v באלכסון מקיימת $M_{v,v} = d_v$

ואכן

$$M_{v,v} = (CC^T)_{v,v} = \sum_{e \in E} C_{v,e} (C^T)_{e,v}$$

$$= \sum_{e \in E} C_{v,e}^2$$

$$= \sum_{e \in E} B_{v,e}$$

כל קשת שחלה (=מכסה) את v
תורמת 1 לסכום

$$= d_v$$

בדוגמה שלנו

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

הגדרה אחרונה לפני שנוכיח את משפט קירכהוף המפורסם. עבור מטריצה ריבועית A מגודל $n \times n$:

$j\in[n]$ נסמן ב- A_j את המטריצה מגודל $(n-1)\times(n-1)$ המתקבלת ע"י הסרת השורה והעמודה ה- j.

משפט Kirchoff's Matrix-Tree (1847)

יהי $G=(V,E)$ גרף קשיר. לכל $v\in V$ מתקיים

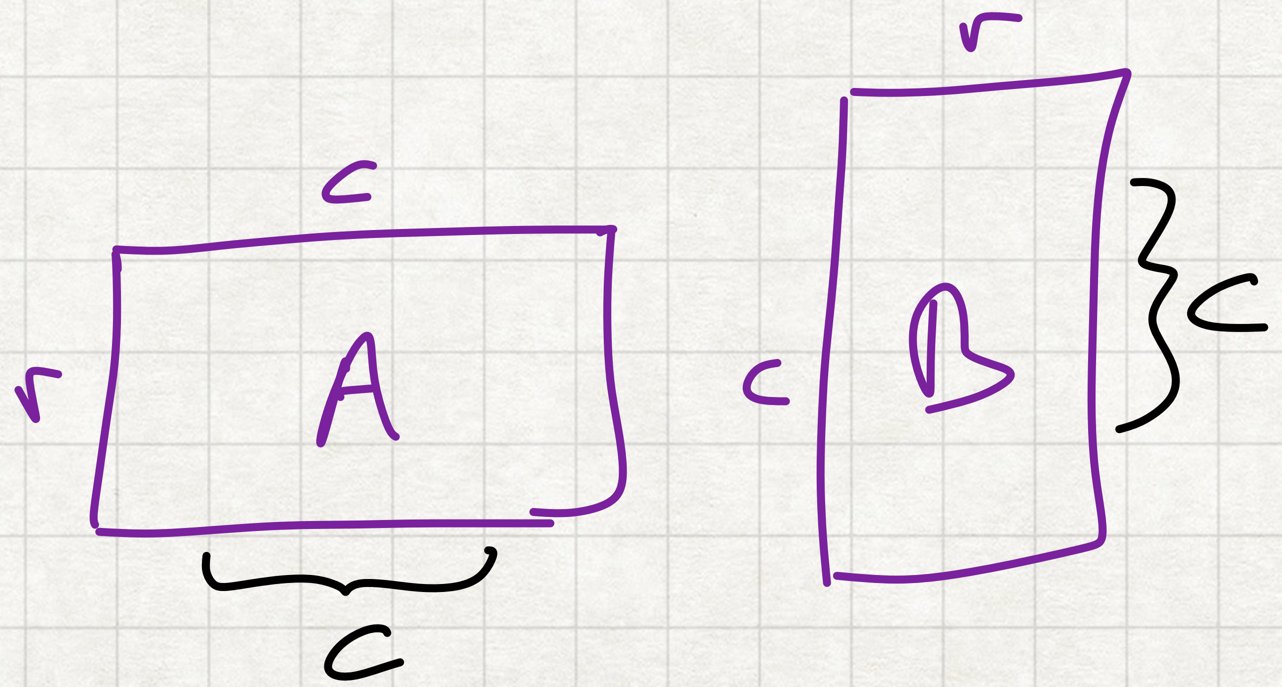
$$\boxed{T(G) = \det M_v}$$

לפני הוכחת משפט קירכהוף נכין את נוסחת קושי-בינה (Binet-Cauchy) מכפלת המטריצות המכלילה את העובדה (הלא טריוויאלית) הידועה: לכל A,B ריבועיות מאותו גודל מתקיים

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

למטריצות שאינן ריבועיות

לפני ניסוח המשפט בהינתן מטריצה $r\times c$, A, ותהי קבוצה $C\subseteq[c]$ של עמודות, נסמן ב- A_C את המטריצה המושרית מ-A ע"י עמודות C. זו מטריצה $r\times|C|$.



שימו לב כי אם $r>c$ אז בכלל הכי $\det(AB)=0$

משפט קושי-בינה

תהי A מטריצה $r\times c$ ו- B מטריצה $c\times r$ כך ש- $r\leq c$. אז

$$\det(AB) = \sum_{\substack{C\subseteq[c] \\ |C|=r}} \det(A_C)\det((B^T)_C)$$

הוכחת משפט קירכהוף.

מכיוון ש $M = CC^T$ אז גם M_v ניתן לרשום כ $M_v = C_v C_v^T$ כאשר C_v זו המטריצה המתקבלת ע"י הסרת השורה ה-v מ-C.

$$\det M_v = \det(C_v C_v^T)$$

נוסחת קושי-בינה

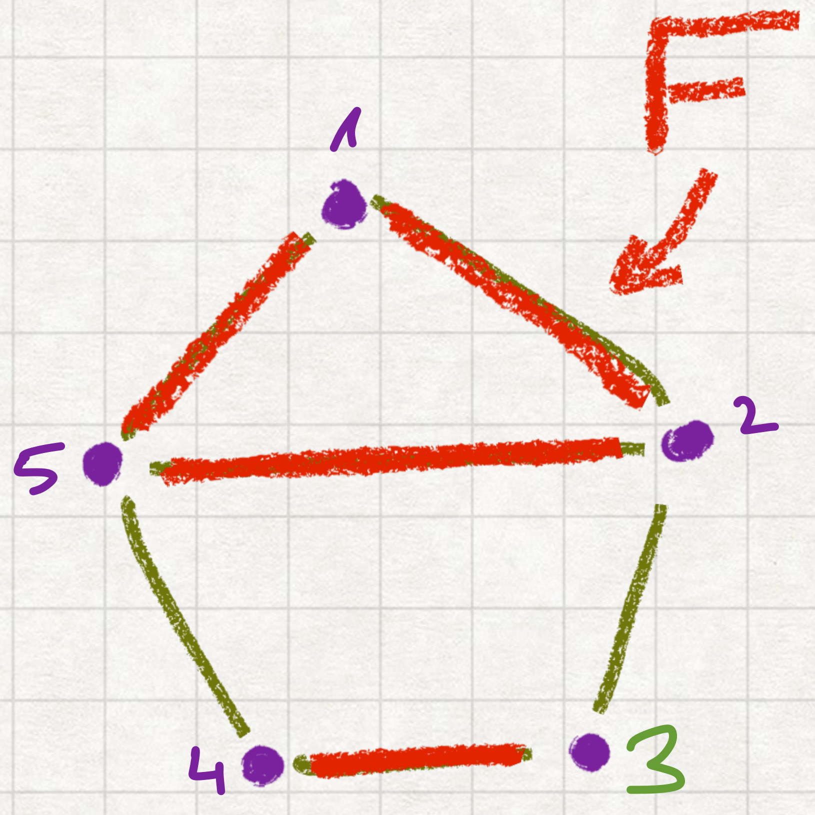
$$= \sum_{\substack{F \subseteq E \\ |F| = n-1}} \det((C_v)_F)^2$$

על כן ההוכחה תושלם אם נראה ש

$$\det(C_v)_F = \begin{cases} \pm 1 & \text{קשתות } F \text{ מהוות עץ ב-}G \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

מצב אחת. אם F לא פורשת את G אז קיים רכיב קשירות בגרף F שאינו מכיל את v.
נבחין כי במקרה זה סכום השורות של רכיב קשירות זה ב- $(C_v)_F$ שווה לאפס שהרי כל עמודה
מתאימה לקשת: אם הקשת נמצאת ברכיב אז יש בה ± 1 (ראו $\{1,2\}$ בדוגמה) ואחרת הקשת
לא נמצאת ברכיב והעמודה היא עמודת אפסים (ראו $\{3,4\}$) לכן $\det (C_v)_F = 0$.

דוגמה



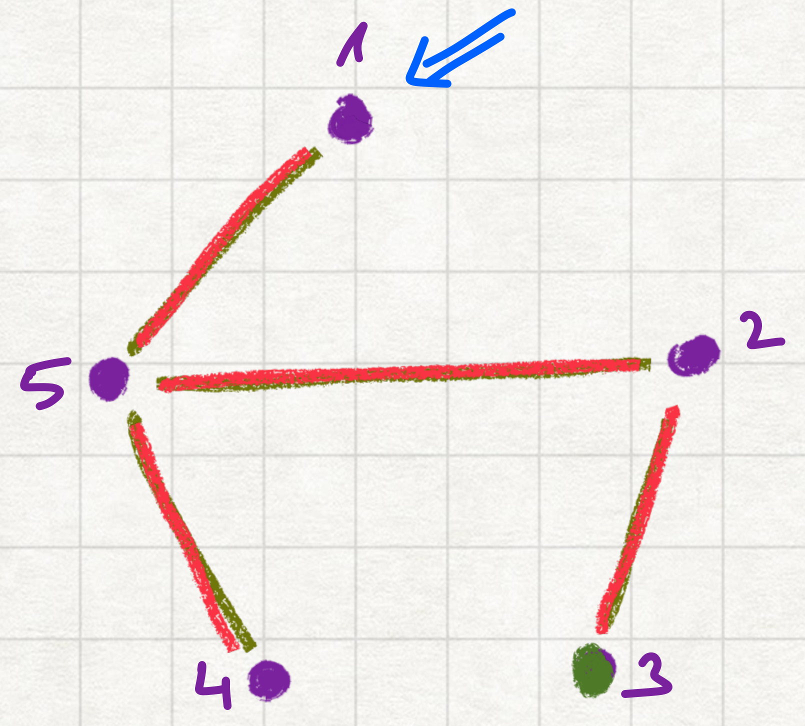
$v=3$

$$(C_3)_F = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ \\ 1+2+5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \{1,2\} & \{2,3\} & \{3,4\} & \{4,5\} & \{5,1\} & \{2,5\} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccccc} 0 & & 0 & & 0 & 0 \end{array} \end{array}$$

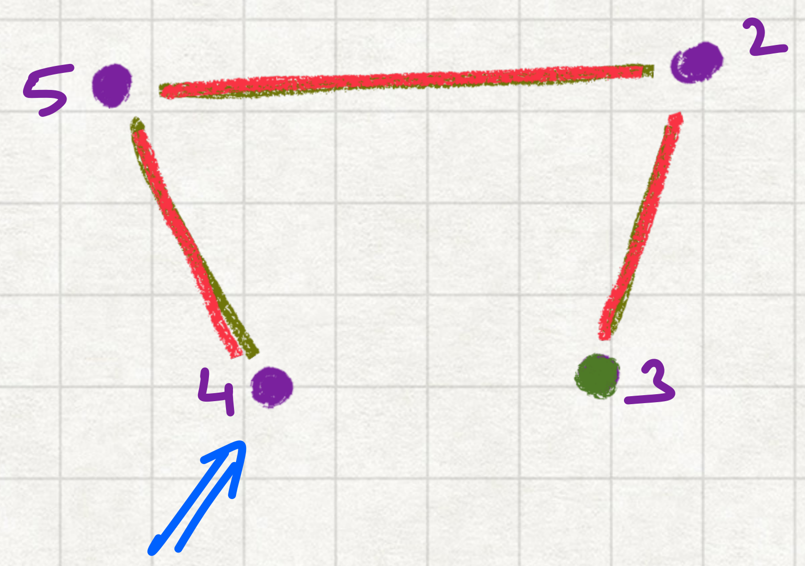
מקרה שני, אם F פורשת עץ ב-G אז קיים עלה v_1 בעץ ששכנו v (זכרו כי בכל עץ יש לפחות 2 עלים).
כלומר קיימת שורה, זו המתאימה לעלה זה, שבה כל הכניסות פרט לאחת הן אפס, והכניסה
הנותרת היא ± 1. נפתח את הדטרמיננטה לפי שורה זו. נבחין כי המטריצה שנותרת אחרי
מחיקת השורה v_1 והעמודה המתאימה (לקשת היחידה שחלה על v_1) מתאימה שוב לעץ, הפעם
עץ ב-$n-2$ צמתים. נמשיך בתהליך זה של פיתוח הדטרמיננטה לפי העלה הנוכחי, ובכל שלב נכפול את הדבר
הקיים ב-± 1.

$\blacksquare$

דוגמה:



$$(C_3)_F = \begin{array}{c|cccc} & \{2,3\} & \{4,5\} & \{5,1\} & \{2,5\} \\ \hline 1 & \multicolumn{4}{c}{\multirow{4}{*}{$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$}} \\ 2 & \\ 4 & \\ 5 & \end{array}$$



$$\begin{array}{c|ccc} & \{2,3\} & \{4,5\} & \{2,5\} \\ \hline 2 & \multicolumn{3}{c}{\multirow{3}{*}{$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$}} \\ 4 & \\ 5 & \end{array} \quad (-1)$$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \{2,3\} & \{2,5\} \end{array} \\ \begin{array}{c} 2 \\ 5 \end{array} & \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \quad (+1)(-1)$$

$$\begin{array}{c c} & \{2,3\} \\ 2 & \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix} \end{array} \quad (-1)(+1)(-1)$$

בכדי להסיק ש $T_n = n^{n-2}$ ממשפט קירכהוף נבחין כי במקרה ש- $G=K_n$ מתקיים

$$\forall v \qquad M_v = \begin{pmatrix} n-1 & & & -1 \\ & n-1 & & \\ -1 & & \ddots & \\ & & & n-1 \end{pmatrix}$$

ומכאן זה כבר עניין של חישוב להוכיח כי

$$T_n = \det M_v = n^{n-2}$$