בדידה 2

השיטה הסימבולית

גיל כהן

הגדרה

מחלקה קומבינטורית היא קבוצה $\mathcal{A}$ יחד עם פונקציית גודל

$$|\cdot| : \mathcal{A} \to \mathbb{N}$$

כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ יש מספר סופי של איברים ב $\mathcal{A}$ מגודל n. כלומר, לכל $n \in \mathbb{N}$ הקבוצה

$$\{a \in \mathcal{A} : |a| = n\}$$

סופית

הגדרה

מחלקה קומבינטורית היא קבוצה A יחד
עם פונקצית גודל

$$|\cdot| : A \to \mathbb{N}$$

כך שלכל גודל $n\in\mathbb{N}$ יש מספר סופי של
איברים מ-A מגודל n.

הגדרה

הפונקציה היוצרת של מחלקה קומבינטורית
A מוגדרת ע"י

$$A(x) = \sum_{a\in A} x^{|a|} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$$

$|\{a\in A : |a|=n\}|$

דוגמה

$A =$ קבוצת כל המחרוזות הבינאריות עם פונקציית גודל שהיא אורך המחרוזת

$$A = \{\varepsilon, 0, 1, 00, 01, \dots\}$$

גודל 0   גודל 1   גודל 2

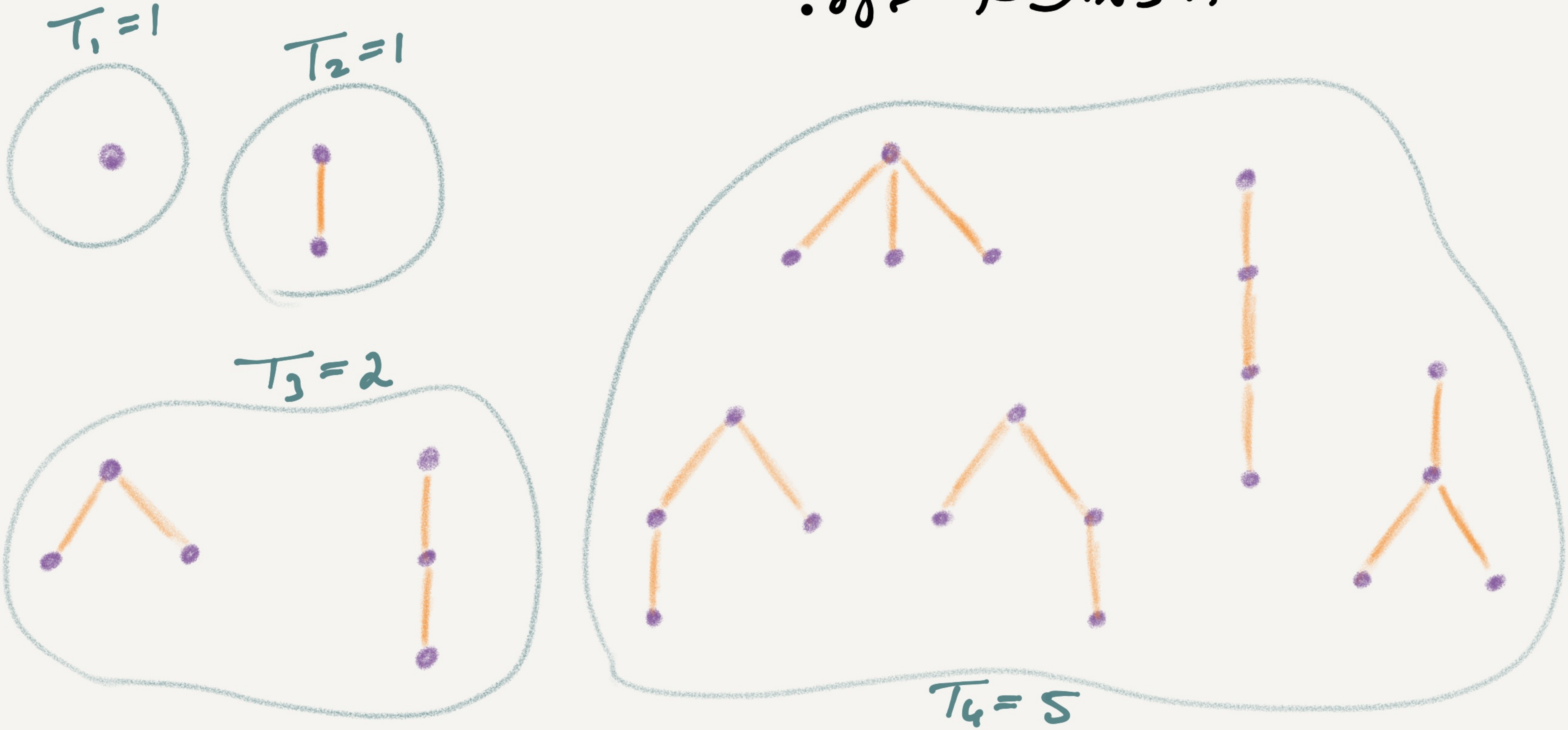
$$A(x) = x^{|\varepsilon|} + x^{|0|} + x^{|1|} + x^{|00|} + x^{|01|} + \cdots$$

$$= 1 + 2x + 2^2 x^2 + \cdots = \frac{1}{1-2x}$$

תזכורת

אין שמות לצמתים!
יש שורש
יש חשיבות לסדר הבנים

T = קבוצת העצים המושרשים המסודרים עם פונקציית הגודל שהיא מספר הצמתים בעץ.



המחלקה הריקה

$A=\emptyset$ מסומנת ב- ε. הפונקציה

היוצרת המתאימה היא $\varepsilon(x)=1$.

מחלקה אטומית

לעיתים מסמנים את
המחלקה ב- a

X_a מחלקה המכילה אך ורק את האיבר

a וגודלו $|a|=1$. הפונקציה היוצרת

המתאימה היא $X_a(x)=x$.

פעולות על
מחלקות קומבינטוריות

פעולה על המחלקות	פעולה מתאימה על הפונ' היוצרת
$A+B$ איחוד זר פונקצית הגודל היא זו המושרית מאלו של A,B	$A(x)+B(x)$
$A\times B$ מכפלה קרטזית פונקצית הגודל היא סכום הגדלים $\lvert(a,b)\rvert=\lvert a\rvert+\lvert b\rvert$	$A(x)B(x)$

הוכחה

הפונקציה היוצרת של $A+B$ היא

מההנחה כי האיחוד זר

$$\sum_{c\in A+B} x^{|c|} = \sum_{a\in A} x^{|a|} + \sum_{b\in B} x^{|b|}$$

$$= A(x) + B(x)$$

בברור יש מספר סופי של איברים ב- $A+B$ מכל גודל נתון.

ולכן המכפלה הקרטזית, הפונ׳ היוצרת המתאימה היא

מהגדרת פונ׳ הגודל

$$\sum_{c\in A\times B} x^{|c|} = \sum_{a\in A}\sum_{b\in B} x^{|a|+|b|}$$

$$= \sum_{a\in A} x^{|a|}\sum_{b\in B} x^{|b|}$$

$$= A(x)\,B(x)$$

בהינתן מחלקה A נסמן

טכנית זו לא אותה
המחלקה אבל לא
נבדיל בינתיים

$$A^2 = A \times A$$

וגם

$$A^3 = A^2 \times A \quad \left(\cong A \times A^2 \right)$$

ובאופן כללי

$$A^k = A^{k-1} \times A$$

ונבחין כי הפונ׳ היוצרת של A^k היא $A(x)^k$.

נרחיב את ההגדרה ל- $k=0$: $A^0 =$ המחלקה הריקה $\mathcal{E}$

פעולת ה-SEQ

אם A היא מחלקה קומבינטורית אז $SEQ(A)$ היא המחלקה המוגדרת ע"י איחוד זר של מכפלה קרטזית מכל אורך של איברי A. כלומר

$$SEQ(A) = \underbrace{A^0}_{\varepsilon} + A^1 + A^2 + \cdots$$

הפונקציה היוצרת המתאימה היא

$$A(x)^0 + A(x)^1 + A(x)^2 + \cdots = \boxed{\frac{1}{1-A(x)}}$$

הערה.

אם ב- A יש איבר a מגודל 0 אז $SEQ(A)$

אינה מחלקה קומבינטורית שכן אז ב- $SEQ(A)$

יהיו ∞ איברים מגודל 0:

$$a,\ (a,a),\ (a,a,a),\ \ldots$$

דוגמה

עבור מחלקת המחרוזות הבינאריות מתקיים

היחס הסימבולי

$$SEQ(X_0+X_1) = SEQ(0+1)$$

על כן הפונקציה היוצרת של המחלקה היא

הפונקציה היוצרת של X_0

$$\frac{1}{1-(x+x)} = \frac{1}{1-2x}$$

הפונקציה היוצרת של X_1

ואכן,

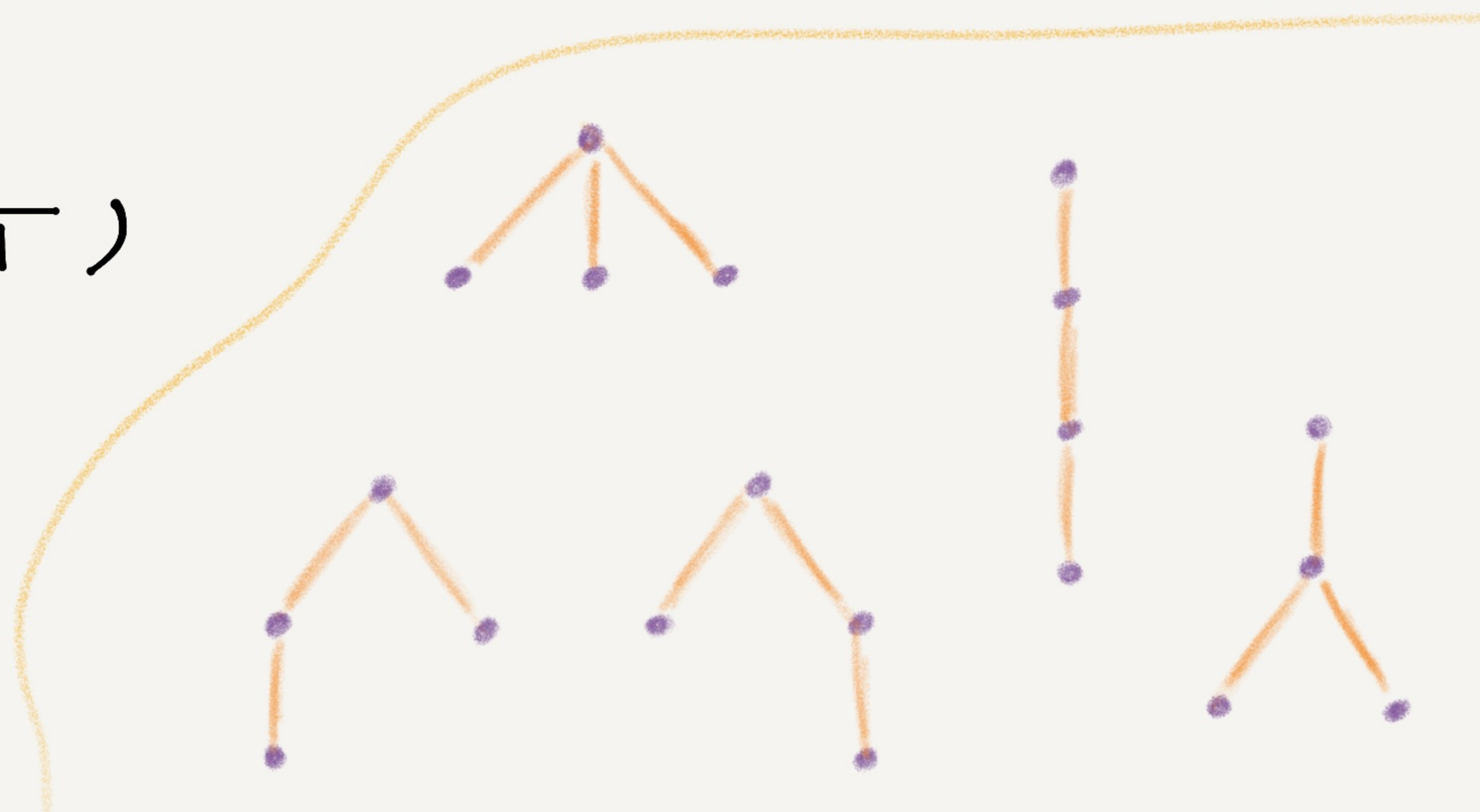
$$\frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$$

מספר המחרוזות הבינאריות מאורך n

מה לגבי מחלקת העצים המושרשים המסודרים?

נסמן ב- $\bullet$ את המחלקה האטומית המייצגת צומת. עץ מושרש מסודר הוא שורש וסדרת עצים. על כן מתקיים היחס הסימבולי

$$T = \bullet \times SEQ(T)$$



$$T = \bullet \times SEQ(T)$$

לכן, הפונ' היוצרת המתאימה מקיימת

$$T(x) = x \cdot \frac{1}{1-T(x)}$$

$$T(x)^2 - T(x) + x = 0$$ או

$$T(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2} \quad \Leftarrow$$

$$T(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2}$$

נזכיר כי

$$\underbrace{\sqrt{1-4x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-4x)^n}_{1-2x+\cdots}$$

$$T(x) = \frac{1 \pm (1-2x+\cdots)}{2} \qquad \Leftarrow$$

אז ה − הוא הפתרון
המתאים

על כן

$$2T(x) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-4x)^n$$

נזכיר גם כי

$$\forall n \geq 1 \quad \boxed{\binom{1/2}{n} = \frac{2}{4^n} (-1)^{n+1} C_{n-1}}$$

ולכן

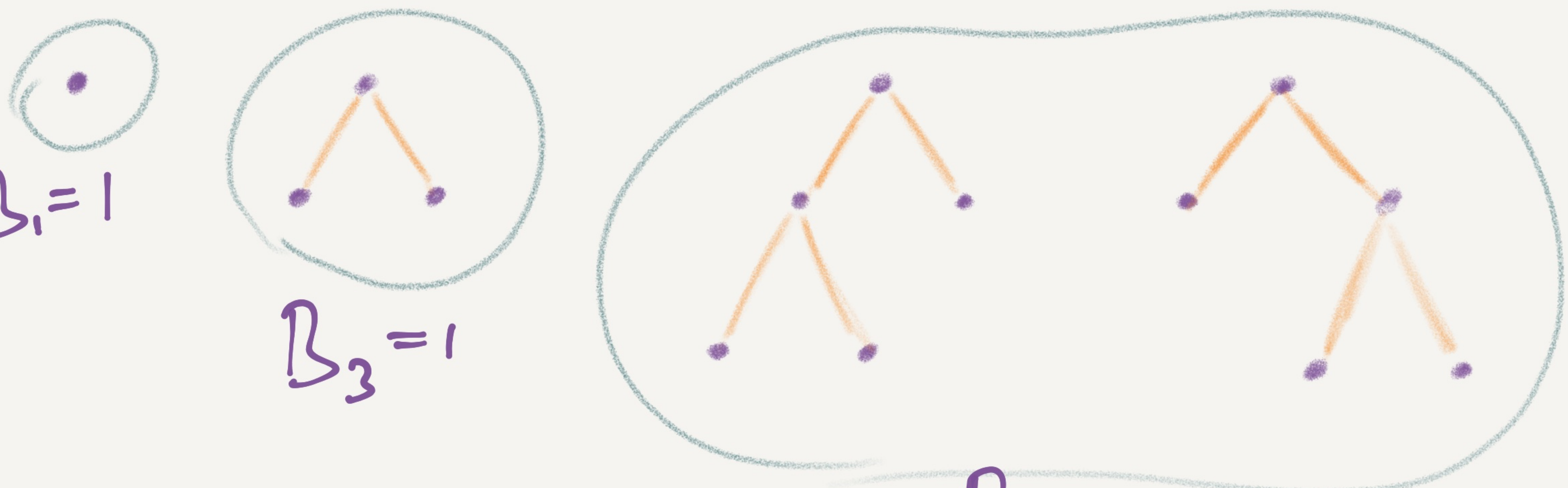
$$2T(x) = 1 - \underbrace{\binom{1/2}{0}(-4x)^0}_{1} + \sum_{n=1}^{\infty} 2 C_{n-1} x^n$$

$$\boxed{T_n = C_{n-1}}$$

עוז קלת עלים

עצים בינאריים

$\mathcal{B}$ = מחלקת העצים הבינאריים המושרשים
המסודרים עם פונ' הגודל = מספר הצמתים.



$B_1 = 1$ $\quad$ $B_3 = 1$ $\quad$ $B_5 = 2$

$(B_2 = 0)$ $\quad$ $(B_4 = 0)$

עץ בינארי מושרש מסודר הוא שורש יחד עם
או אף עץ שכבר שתלוי עליו או שניים. היחס
הסימבולי הוא לכן

$$\mathcal{B} = \bullet \times (\varepsilon + \mathcal{B} \times \mathcal{B})$$

ולכן הפונקציה היוצרת $B(x)$ מקיימת

$$B(x) = x\left(1 + B(x)^2\right)$$

$$B(x) = x\left(1 + B(x)^2\right)$$

על כן

$$xB(x)^2 - B(x) + x = 0$$

כמו קודם ניקח מינוס

$$\Longleftarrow \quad B(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x^2}}{2x}$$

נזכיר כי בבעיה הקודמת קיבלנו

$$T(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2}$$

$$B(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{2x} \qquad T(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$$

על כן

$$xB(x) = T(x^2)$$

ולכן

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{T_n}_{= C_{n-1}} x^{2n}$$

נסיק ש

$$\boxed{B_n = \begin{cases} 0 & \text{זוגי } n \\ C_{\frac{n-1}{2}} & \text{אי-זוגי } n \end{cases}}$$

חזרה למחרוזת
בינארית ללא שני
אחדים רצופים

$F =$ מחלקת המחרוזות הבינאריות ללא שני 1-ים רצופים. פונ' הגודל = אורך המחרוזת.

מתקיים היחס הסימבולי

$$F = \varepsilon + 0 \times F + 10 \times F$$

מחרוזת ריקה

0 מלווה בכל מחרוזת מהמחלקה

10 מלווה בכל מחרוזת מהמחלקה

$$\Leftarrow \quad F(x) = 1 + xF(x) + x^2F(x)$$

$$F(x) = 1 + xF(x) + x^2F(x)$$

לכן

$$F(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$$

שבור חישבון דעבר.

דוגמאות
נוספות

דוגמא

כמה מחרוזות בינאריות מאורך n ישנן ללא רצף של p אפסים רצופים

נסמן את המחלקה המתאימה ב- $\mathcal{A}$ ונבחין כי מתקיים היחס הסימבולי

$$\mathcal{A} = \left(\varepsilon + 0 + 00 + \cdots 0^{p-1}\right) \times \left(\varepsilon + 1 \times \mathcal{A}\right)$$

אכן, מחרוזת ללא 0^p מתחילה לכל היותר $p-1$ אפסים ולאחריה בסוף או 1 ואז ...

$$\mathcal{A} = (\varepsilon + 0 + 00 + \cdots 0^{p-1}) \times (\varepsilon + 1 \times \mathcal{A})$$

$\Leftarrow$

$$A(x) = \underbrace{(1 + x + x^2 + \cdots + x^{p-1})}_{\frac{1-x^p}{1-x}}(1 + x A(x))$$

ולכן

$$A(x) = \frac{1-x^p}{1-2x+x^{p+1}}$$

למשל עבור $p=3$ מתקיים שהמכנה

$$1-2x+x^4 = (x-1)(x^3+x^2+x-1)$$

$$= (x-1)(x-0.5437\ldots)\cdot$$
$$(x+0.77\ldots-1.11\,i)(x+0.77+1.11\,i)$$

ובכן ה- 0.5437 הוא קירוב לשורש האמיתי

$$\frac{1}{3}\left(-1-\frac{2}{\sqrt[3]{17+3\sqrt{33}}}+\sqrt[3]{17+3\sqrt{33}}\right)$$

משפטים מתקדמים שלא נלמד בקורס (ומתבססים על תוצאות עמוקות ומרתקות מאנליזה של מספרים מרוכבים) קובעים כי השורש הזה קובע קירוב טוב מאוד לפתרון. כלומר

$$A_n \sim \left(\frac{1}{0.5437}\right)^n \sim 1.839^n$$

נשווה זאת למקרה בו נרצה להימנע מ-0^2:

$$\sim \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \sim 1.618^n$$

דוגמה נוספת – עצי 1-2

כמה עצים מושרשים מסודרים ישנם על n צמתים בהם לכל צומת שאינו עלה יש 1 או 2 בנים?

נלך ישירות לניסוח הסימבולי

$$T = x\,(\varepsilon + T + T^2)$$

ולכן

$$T(x) = x\,(1 + T(x) + T(x)^2)$$

$$T(x) = x\left(1 + T(x) + T(x)^2\right)$$

$\Leftarrow$ $T(x)$ מקיים את המשוואה

$$xy^2 + (x-1)y + x = 0$$

$$y = \frac{1 - x \pm \sqrt{(x-1)^2 - 4x^2}}{2x}$$

$$= \frac{1 - x \pm \sqrt{1 - 2x - 3x^2}}{2x}$$

$$\boxed{y = \frac{1-x \pm \sqrt{1-2x-3x^2}}{2x}}$$

$$= \frac{1-x \pm \sqrt{(1+x)(1-3x)}}{2x}$$

גם כאן הדרך להתקדם לפתרון מקורב היא בעזרת טכניקות מתקדמות. בכלל, העובדה ש-3 הוא השורש הגדול של המשוואה הריבועית לעיל גורר ש-

$$\boxed{T_n \sim 3^n}$$

ליתר דיוק הקירוב שניתן לקבל הוא

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{4}{3}\pi n^3}} \cdot 3^n$$

מסתבר גם שהגורם $n^{-3/2}$ משותף להמון

בעיות הקשורות לספירת עצים!

ובהזדמנות זו נציין כי מספרי קטלן מקיימים

$$C_n = \frac{4^n}{\sqrt{\pi}\, n^{3/2}}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

נעצור כאן.

מקווה שנהניתם בקורס
ושלמדתם כמה קומבינטוריקה
עמוקה ומדהימה

גיל