נוסחת הבינום

גיל כהן

נוסחת הבינום של ניוטון

כולנו זוכרים ש

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

ועם קצת מאמץ אפשר לחשב את

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b)\\ &= (a^2+2ab+b^2)(a+b)\\ &= a^3+2a^2b+b^2a+a^2b+2ab^2+b^3\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

ברמה העקרונית אפשר להמשיך ולפתח את $(a+b)^n$ עבור כל חזקה $n\geq 1$

תוך שימוש בפיתוח של חזקות קודמות. מעשית, זו דרך בעייתית.

נוסחת הבינום של ניוטון

נסתכל שוב על הבעיה. נניח ואנו רוצים לפתח את

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b)$$

a	a	a
a	a	b
a	b	a
a	b	b
b	a	a
b	a	b
b	b	a
b	b	b

אנו יודעים שמכפלת המחוברים הנ״ל תתרגם לסכום של כפולות

כאשר נחבר כל כפולה המתקבלת מבחירת איבר מהסוגריים הראשונים

מוכפל באיבר מהסוגריים השניים כפול איבר מהסוגריים האחרונים.

נוסחת הבינום של ניוטון

נסתכל שוב על הבעיה. נניח ואנו רוצים לפתח את $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b)$

$$
+\quad
\begin{array}{ccc}
a & a & a \\
a & a & b \\
a & b & a \\
a & b & b \\
b & a & a \\
b & a & b \\
b & b & a \\
b & b & b \\
\hline
\end{array}
$$

מספר המחרוזות באורך 3
מעל $\{a,b\}$ עם בדיוק 3 b-ים.

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

מספר המחרוזות מעל $\{a,b\}$ באורך
3 עם בדיוק 2 a-ים.

נוסחת הבינום של ניוטון

לכל $n \geq 0$

מספר המחרוזות באורך n מעל $\{a,b\}$ עם בדיוק k a-ים

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$= a^n + n a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + n a b^{n-1} + b^n$$

שאלה 1

הוכיחו כי לכל $0 \leq k \leq n$ מתקיים $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

פתרון

נזכור כי $1+1=2$:)

מנוסחת הבינום

$$2^n = (\overset{a}{1}+\overset{b}{1})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

שאלה 2

הוכיחו כי לכל $0 \le k \le n$ מתקיים

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

פתרון

נזכור כי $1-1=0$:)

מנוסחת הבינום

$$0 = (\underbrace{1}_{a} - \overbrace{1}^{b})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$$

שאלה 3

הוכיחו כי לכל $0 \leq k \leq n$ מתקיים

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$$

פתרון

שאלה 3

הוכיחו כי לכל $0 \le k \le n$ מתקיים

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$$

פתרון

מנוסחת הבינום עם $a=x$, $b=1$ נקבל כי לכל $x \in \mathbb{R}$

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

נגזור בין שני פולינומים!

שאלה 3

הוכיחו כי לכל $0 \le k \le n$ מתקיים

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$$

פתרון

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

אם שני הפולינומים זהים, כן גם הנגזרות שלהם! ולכן

$$n(x+1)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k x^{k-1}$$

נציב $x=1$ ונקבל

$$n \cdot 2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$$

זהות פסקל

הוכיחו כי לכל $n \geq 1$ ו- $1 \leq k \leq n$:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

זהות פסקל

הוכיחו כי לכל $n \geq 1$ ו- $1 \leq k \leq n$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

פתרון מכוער

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-1-k)!} \underbrace{\left[\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right]}_{\frac{n}{k(n-k)}} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

זהות פסקל

הוכיחו כי לכל $n \geq 1$ ו- $1 \leq k \leq n$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

פתרון לא מכוער

נעזר בספירה כפולה. נשאל כמה תתי קבוצות מגודל k יש ל- $[n]$. מצד אחד $\binom{n}{k}$.

את אגף ימין נספור בעזרת חלוקה למקרים - אלו המכילות את האיבר 1 ואלו שאינן.

מספר הקבוצות שאינן מכילות את 1 $\binom{n-1}{k}$ $+$ $\binom{n-1}{k-1}$ מספר הקבוצות שמכילות את 1

משולש פסקל

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \qquad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \qquad \binom{2}{1} \qquad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \qquad \binom{3}{1} \qquad \binom{3}{2} \qquad \binom{3}{3}$$

זהות פסקל

$$\binom{4}{0} \qquad \binom{4}{1} \qquad \binom{4}{2} \qquad \binom{4}{3} \qquad \binom{4}{4}$$

$$\iddots \qquad \vdots \qquad \ddots$$